ESTIMATION AF RENTESTRUKTUREN

Claus Madsen
efteråret 1989

e-mail: cam@fineanalytics.com

FORORD

Dette papir er skrevet i forbindelse med udvikling af en model til estimation af rentestruturen. Modellen er den første af en række af modeller, som vil blive udviklet i forbindelse med udvikling af et større porteføljeanalysesystem til renteafhængige fordringer. Papiret diskuterer udelukkende de teoretiske aspekter ved estimation af rentestrukturen og anviser kun en enkel fremgangsmåde måde. Metoden tager udgangspunkt i Chambers, Carleton og Waldmann's papir fra 1984. Når det er valgt at anvende denne model, skyldes det blandt andet, at det er den mest benyttede model i Danmark. Det skyldes primært introduktion af RIO-systemet. Dette papir diskutere således ikke, om modellen er den mest velegnede til estimation af rentestrukturen i Danmark - men papiret ønsker blot at beskrive den valgte fremgangsmåde for estimering af den danske rentestruktur.

CLAUS MADSEN

November/december 1989

Estimation af rentestrukturen, part 1.

1. Indledning

Rentestrukturen viser prisrelationen som eksisterer på ethvert tidspunkt imellem defaultfrie nulkuponobligationer som en funktion af løbetiden. Både normativt, (ved test af portefølje immuniserings strategier) og positivt (ved test af alternative specifikationer af rentestrukturens udvikling over tid) er det nødvendigt, at rentestrukturen kan observeres - enten direkte eller via en statistisk procedure.

Det danske obligationsmarked består kun af kuponobligationer. Disse kan betragtes som en portefølje af nulkuponobligationer. Dette medfører, at det er nødvendigt at bestemme rentestrukturen statistisk. Denne estimation er dog kompliceret pga. forstyrrelser i prisrelationen som bl.a. løbetidsrelateret heteroskedasticitet.

I dette papir vil jeg anvise en estimationsmetode hvorom det gælder, at nutidsværdikoefficienterne i obligationsprisfunktionen kan udtrykkes ved en n'te grads polynomium i løbetiden. Den løbetidsrelaterede heteroskedasticitet bliver estimeret samtidigt.

Dette Working Paper vil være opdelt som følger; i afsnit 2 vil jeg kort gennemgå problemerne ved estimering af rentestrukturen, derefter vil jeg i afsnit 3 diskutere alternative rentestrukturparameteriseringer, og i afsnit 4 vil den valgte metode blive gennemgået.

2. Rentestruktur estimation for default-frie finansielle aktiver.

I dette papir er et default-fri finansielt aktiv, defineret som et aktiv, hvorom det gælder, at sandsynligheden for, at det aktuelle cash-flow vil divergere fra det lovede cash-flow, er nul. Prisen på et default-fri aktiv kan udtrykkes som en lineær kombination af aktivets forventede cash-flow. Udtrykt ved en vektor kan det skrives som:

$$P_i=\sum_{t=1}^{n} F_i(t)\,q(t) \tag{1}$$

Hvor t er tiden

P_i = Prisen på det i'te default-frie aktiv.
$F_i(t)$ = Aktivets forventede cash-flow på tidspunkt t.
n = Løbetiden.
q(t) = Nutidsværdi koefficienten som defineret herunder.

Koefficienten q(t) kan forstås som prisen på et default-fri aktiv, med et forventet cash-flow på 1 kr. på tidspunkt t, hvor t= 1,2,.......,n. Hvor q(t) er diskonteringsfunktionen. Sammenhængen mellem diskonteringsfunktionen og nulkuponrentestrukturen kan udtrykkes således i diskret tid:

$$q(t)=(1+h(0,t))^{-t} \tag{2}$$

og i kontinuerlig tid:

$$q(t)=\exp(-\ln(1+h(0,t)),t) \tag{3}$$

Prisen på en nulkuponobligation er derfor udtrykt ved periodens gældende diskonteringsfaktor.

Når de fremtidige cash-flow på default-frie obligationer er kendt, prisen kan observeres, og antallet af obligationer med lineære uafhængige vektorer af forventet cash-flow overstiger antallet af terminsdatoer, kan diskonteringsfunktionen direkte udledes fra formel 1. Endvidere kan de dertil hørende nulkuponrenter bestemmes, og de eksakte priser på enhver default-fri obligation udledes fra den observerede diskonteringsfunktion.

Da betingelserne, som skal være opfyldt før formel 1 holder, er temmelig restriktive, kan det være interessant at betragte nogle empiriske resultater.

Carleton og Cooper (1976) har eksempelvis brugt en OLS regressionsmodel på default-frie amerikanske statsobligationer og fandt, at en unik vektor af diskonteringsfaktorer, hvor formel 1 holdt for samtlige obligationer, ikke eksisterede.

I dette papir vil jeg derfor tillade de teoretiske obligationspriser at divergere fra markedsprisen, således at formel 1 kan omskrives til:

$$P_i = \sum_{t=1}^{n} F_i(t)\,q(t) + \epsilon_i \tag{4}$$

Der er i princippet 3 argumenter for tilstedeværelsen af disse prisforstyrrelser:

1. Da kuponobligationer med en løbetid ud over en-periode indeholder oplysninger, som beskæftiger sig med mere end en diskonteringsfaktor, må der være en vis usikkerhed i estimationsprocessen.

2. Hvis obligationsporteføljer ikke rebalanceres kontinuerligt, er det muligt, - på ethvert tidspunkt - at enhver obligation kan afvige i pris med en random størrelse.

3. Tilstedeværelsen af købs/salgs-spreads kan også øge estimationsfejlen. Grunden er, at de officielt noterede priser ikke kan betragtes som en pris, som alle markedsdeltagerne vil cleare på.

Eftersom prisfunktionen, givet ved formel 4 er en klassisk regressionsmodel, er det muligt at estimere diskonteringsfunktionen ved brug af en OLS model. For at benytte denne teknik er det dog nødvendigt at forudsætte, at den teoretiske pris kan divergere fra markedsprisen ved at inkludere et støjled i prisudtrykket, som det er vist i formel 4[1].

Hvis der bruges en OLS-model til at regressere de observerede obligationspriser, på deres forventet cash-flow matrice vil de estimerede parametre være punktestimater på diskonteringsfunktionen.

[1] I dette papir som i tidligere studier er der forudsat at fejlleddet er additivt. Foruden den indlysende fordel i estimationsproceduren, har jeg ikke kunnet finde nogen begrundelse for en alternativ specifikation.

Anvendelse af en OLS model i praksis, giver visse komplikationer, fordi dataene har en tendens til at generere singulære cash-flow matricer. Til løsning af dette problem er der i princippet 2 metoder. Den første metode stammer fra Carleton og Cooper, som løser problemet ved at benytte et omhyggeligt udvalgt datamateriale, hvorom det gælder, at der er betalinger fra mindst 2 obligationer på enhver terminsdato. Den anden metode er at sætte restriktioner på parameterrummet. Jeg vil diskutere begge disse metoder i nævnte rækkefølge.

En nødvendig betingelse for at kunne bruge en OLS regressionsmodel på obligationspriserne er, at cash-flow matricen er nonsingulær. Jordan (1981) undersøger disse forhold nøje og observerer følgende problemer: 1. to terminsdatoer - hvorom det gælder - at der falder mindst 2 identiske rentebetalinger og ingen obligationer udløber, vil generere en singulær cash-flow matrice, 2. en terminsdato - hvorom det gælder - at ingen obligationer udløber, vil resultere i relativt store standardafvigelser.

For at løse disse problemer kan stikprøver vælges således, at der på ethvert tidspunkt udløber mindst en obligation. Da en OLS metode, som nævnt tidligere, medfører, at estimaterne er punktestimater på diskonteringsfunktionen, vil det altså være nødvendigt at interpolere mellem de nærmeste terminsdatoer for at finde de øvrige diskonteringsfaktorer.

Præcisionen "boniteten" af estimaterne opnået ved interpolation er svære at bestemme. Grunden er, at ethvert interpoleret punktestimat inkluderer specifikationsfejlen i estimationen på de 2 nærmeste terminsdatoer og en uspecificeret fejl, som afhænger af den valgte interpolationsmetode. På trods af disse problemer, viser Carleton og Cooper's undersøgelser dog at en sådan metode kan anvendes. Carleton og Cooper's estimationsprocedure er mest brugbar i en estimation af diskonteringsfunktionen over "korte" løbetider, da singularitets problemet nemmest undgås her. Singularitets problemet opstår typisk ved "lange" løbetider p.g.a. det begrænsede udbrud af lange inkonverterbare obligationer.

En anden måde at løse singularitetsproblemet på, er at kompresse parameterrummet ved at lægge restriktioner på diskonteringsfaktorerne. En vigtig faktor er selvfølgelig valg af funktionsform, som skal bruges til at kompresse parameterrummet.

Weiserstras' approximationssætning indikerer, at der er en klasse af funktioner, som kan bruges til at approximere enhver kontinuerlig funktion over et givet interval med en relativ lille approximationsfejl, nemlig simple polynomier. Derfor kan rentestrukturen, når den er forudsat at være kontinuerlig, approximeres med et polynomium.

3. Alternative estimationsmetoder af rentestrukturen

Der er flere forfattere, der har påpeget problemerne ved brugen af et simpelt polynomium til beskrivelse af rentestrukturen. Mcculloch (1971) påpeger, at selv polynomier af så høj grad, at funktionen tilpasser både rentestrukturens "korte" og "lange" ende, vil funktionen formentlig tage "ekstreme" værdier mellem observationerne i den "lange" ende istedet for at være monoton degressiv, som diskonteringsfunktionen bør være.

Mcculloch estimerer diskonteringsfunktionen $q(t) = (1 + h(0,t))^{-t}$ under forudsætning om kontinuerlig sammenhæng og transformerer den estimerede diskonteringsfunktion til en rentestruktur. I hans artikel fra 1971 antager han, at q(t) har et kontinuerligt stykvist kvadratisk forhold i t. I et givet interval $t_0 \leq t < t_1$ specificerer han q(t) som $a_{01}+b_{01}t+C_{01}t^2$.

Estimationsprocessen foregår ved at bestemme parametrene for funktionen indenfor dette interval. For det efterfølgende interval $t_1 \leq t < t_2$, hvor parametrene er a_{12}, b_{12} og c_{12}, ønsker han at parametrene er bestemt således, at q(t) har samme værdi på knudepunktet t_1. Princippet er en kvadratisk spline metode.

Hvis der istedet betragtes en cubic spline metode, er det af Shea (1984) vist, at Mcculloch's metode er equivalent med en stykvis polynomiums approximation, hvor der på hvert knudepunkt skal gælde, at funktionsværdien - den første afledende og den anden afledende - er ens.

Hvis det forudsættes, at der er K + 1 knudepunkter, vil en estimation under antagelse om uafhængighed imellem de K estimerede polynomier (3. grads polynomier) medføre, at der skal estimeres 4 x K parametre. Ved at benytte de 3 bibetingelser på hvert knudepunkt kan dette antal dog indskrænkes til 4K - 3(K - 1) = K + 3 parametre.

Det er muligt, som nævnt af Shea, hvis stikprøven er større end antal frihedsgrader at estimere modellen ved en OLS metode, men dette medfører "kun" punktestimater på diskonteringsfunktionen.

De metoder jeg hidtil har nævnt, bygger på polynomier, hvor det generelle problem er, at de divergerer i stigende takt med løbetiden. Sådanne modeller postulerer altså implicit, at forwardrenterne stiger eller falder eksplosivt med stigningen i løbetiden (dette problem er bl.a. blevet påpeget af Shea). Hvis de aktuelle forwardrenter derimod er en stabil funktion af løbetiden og konvergerer asymptotisk, vil "rene" polynomiums modeller være unøjagtige i deres approximation.

Den passende funktionelle form kan dog være svær at udlede fra dataene alene, for som nævnt af Livingstone og Jain (1982) behøver punktsværmen, fremkommet ved at plotte de effektive renter på kuponobligationer, ikke at være en guide til det asymptotiske adfærd for den underliggende diskonteringsfunktion, da effektive renter altid vil konvergere mod en asymptote, ligegyldig om diskonteringsfunktionen er stabil eller ej (se Maikel 1962). På baggrund af disse betragtninger har Nelson og Siegel (1987) opstillet en såkaldt Parsimonious model for rentestrukturen.

I deres papir viser de, at hvis forwardrenterne opfører sig stabilt som en funktion af løbetiden, kan den "lange" ende af rentestrukturen beskrives ved en forældelsesproces, som er proportional med den reciprokke af løbetiden. Deres model kan udtrykkes således:

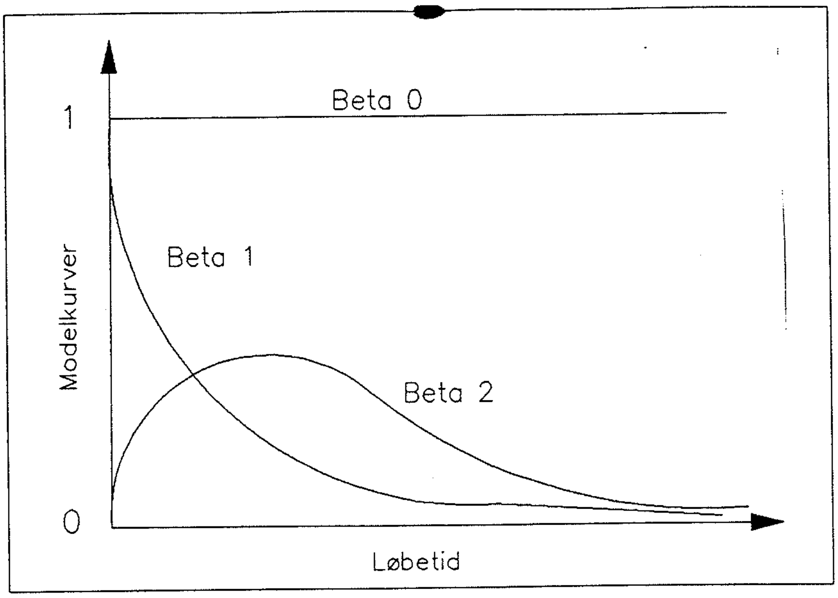
$$r(t)=\beta_0+\beta_1 e^{(-\frac{t}{\rho})}+\beta_2((\frac{t}{\rho})\times e^{(-\frac{t}{\rho})}) \tag{5}$$

Hvor r(t) er forwardrentestrukturen, t er tiden, ρ er en tidskonstant, som måler hastigheden i forældelsesprocessen og β_0, β_1 og β_2 er parameterne.

Formel 5 er en laguerre funktion med konstant β_0. Laguerre funktioner består af eksponentielle forældelsesled.

Flexibiliteten af denne anden ordens model kan forstås ved at betragte parametrene β_0, β_1 og β_2 ,som måler styrken i henholdsvis den "lange", den "korte" og den "mellemlange" ende af forward-rentestrukturen (og dermed rentestrukturen).

De 3 parametres indvirkning kan grafisk vises således:



renter på kuponobligationer, ikke at være en guide til det asymptotiske adfærd for den underliggende diskonteringsfunktion, da effektive renter altid vil konvergere mod en asymptote, ligegyldig om diskonteringsfunktionen er stabil eller ej (se Maikel 1962). På baggrund af disse betragtninger har Nelson og Siegel (1987) opstillet en såkaldt Parsimonious model for rentestrukturen.

I deres papir viser de, at hvis forwardrenterne opfører sig stabilt som en funktion af løbetiden, kan den "lange" ende af rentestrukturen beskrives ved en forældelsesproces, som er proportional med den reciprokke af løbetiden. Deres model kan udtrykkes således:

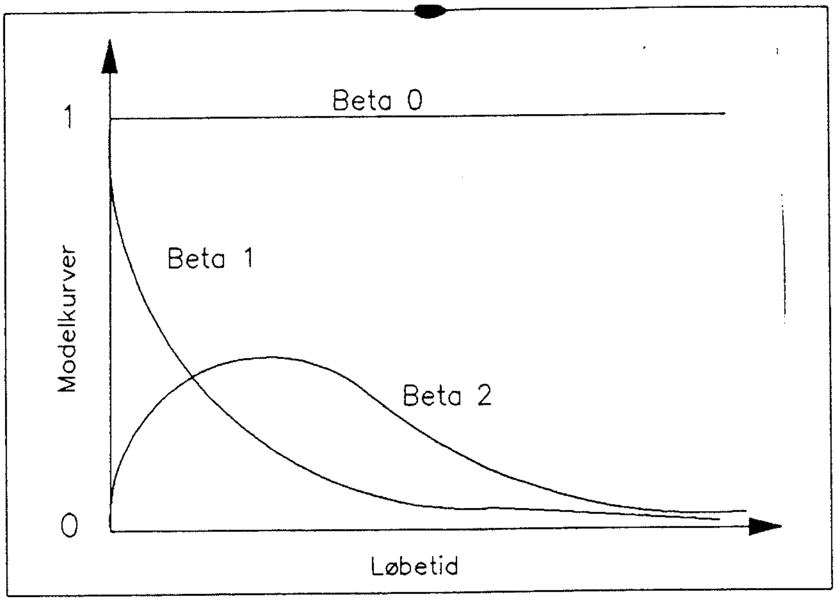
$$r(t)=\beta_0+\beta_1 e^{(-\frac{t}{\rho})}+\beta_2((\frac{t}{\rho})\times e^{(-\frac{t}{\rho})}) \quad (5)$$

Hvor r(t) er forwardrentestrukturen, t er tiden, ρ er en tidskonstant, som måler hastigheden i forældelsesprocessen og β_0, β_1 og β_2 er parameterne.

Formel 5 er en laguerre funktion med konstant β_0. Laguerre funktioner består af eksponentielle forældelsesled.

Flexibiliteten af denne anden ordens model kan forstås ved at betragte parametrene β_0, β_1 og β_2 ,som måler styrken i henholdsvis den "lange", den "korte" og den "mellemlange" ende af forwardrentestrukturen (og dermed rentestrukturen).

De 3 parametres indvirkning kan grafisk vises således:



Rentestrukturen kan udtrykkes således:

$$R(t) = \frac{1}{t}\int_0^t r(t)\,dt \tag{6}$$

I forbindelse med påstanden om, at den "lange" ende af rentestrukturen konvergerer asymptotisk mod $^1/_t$ er det vist af Nelson og Siegel (1988), at dette er tilfældet, hvis 2 betingelser er opfyldt. Den første er, at forwardrenteren har en endelig begrænset værdi, og den anden er, at konvergeringen mod denne endelige værdi ikke må gå for "langsomt".

En anden metode at tackle problemet med den "lange" ende af rentestrukturen er foreslået af Vasicek og Fong (1982). Deres model er en såkaldt eksponentiel spline metode[2]. Baggrunden for modellen er af Vasicek og Fong formuleret således:

"Earlier approaches (cf. Mcculloc 1971, 1975) fit the discount function by means of polynomial splines of the second or third order. While splines constitute a very flexible family of curves, there are several drawbacks to their use in fitting discount functions. The discount function is principally of an exponential shape, $d(t) \sim e^{-R(t)}, 0<t<\infty$. Splines, being piecewise polynomials, are inherently ill suited to fit an eksponential type curve. Polynomials have a different curvature from exponential, and although a polynomial spline can be forced to be arbitrarily close to an exponential curve by choosing a sufficiently large number of knot points, the local fit is not good. A practical manifestation of the phenomenon is that a polynomial spline tends to weave around the exponential, resulting in highly unstable forward rates (which are the derivatives of the logarithm of the discount function). Another problem which polynomial splines is their undesirable asymptotic properties. Polynomial splines cannot be forced to tail of in a exponential form with increasing maturities."

De antage, at diskonteringsfunktionen kan udtrykkes således:

$$q(t) = a_0 + a_1 e^{-\alpha t} + a_2 e^{-2\alpha t} + a_3 e^{-3\alpha t} \tag{7}$$

Hvor α er en konstant, hvorom det gælder, at $\lim_{t\to\infty} r(t) = \alpha$. Man kan altså kalde denne model for en eksponential forældelsesmodel.

I stedet for at arbejde med $\ln q(t)$, transformerer de funktionen $q(t)$ for at kunne bruge en GLS metode istedet for en ikke lineær

[2] Denne metode er ogås blevet foreslået af Langetieg og Smoot 1981.

estimationsmetode. Denne transformation medfører, at de i hvert interval approximerer diskonteringsfunktionen med et kubisk polynomium.

Det er vist af Shea (1985), at Vasicek og Fongs eksponentiale spline-metode lider af de samme problemer som et polynomiale splin-princip, fordi de bruger polynomium splines efter transformationen af diskonteringsfunktionen.

Den metode, som jeg har valgt, bygger på Chambers, Carleton og Waldmann (1984). Denne nye teknik medfører en effektiv glat diskonteringsfunktion og samtidigt opnås der estimater for alle renter på ethvert tidspunkt. De forudsætter, at rentestrukturen kan udtrykkes ved et polynomium og diskonteringsfunktionen ved en eksponential polynomium.

De løser dilemmaet med form/niveau i estimationen af rentestrukturen ved at inddrage heteroskedasticitet direkte i approximationen. Dette gør dog estimationen mere kompleks.

4 Estimering af rentestrukturen

Jeg vil, som Chambers, Carleton og Waldmann, antage, at rentestrukturen kan udtrykkes ved et polynomium i tiden, altså:

$$R(t)=\sum_{j=0}^{n} a_j t^j \tag{8}$$

Hvor n er polynomiets grad, a_j er den j'te koefficient til polynomiet og t er tiden. Dette medfører, at diskonteringsfunktionen kan udtrykkes således:

$$q(t)=e^{(-R(t),t)}=e^{(-\sum_{j=0}^{n} a_j t^{j+1})} \tag{9}$$

altså den i'te obligationspris må - under antagelse om ingen arbitrage muligheder - kunne udtrykkes som:

$$E(P_i)=\sum_{t=1}^{T} F_i(t)\, e^{(-\sum_{j=0}^{n} a_j t^{j+1})}=\sum_{t=1}^{T} F_i(t)\, q(t) \tag{10}$$

hvor $E(P_i)$ repræsenterer den forventede pris. Som blev redegjort for i anden afsnit, kan denne formel ikke forventes at ville gælde, derfor indføres et støjled:

$$P_i - E(P_i) = P_i - \sum_{t=1}^{T} F_i(t)\, q(t) = \epsilon_i \qquad (11)$$

P_i er den i markedet observerede pris, og ϵ'erne er uafhængige normalfordelte stokastiske variabler med en middelværdi lig 0.

Spørgsmålet, der klart stiller sig, er - hvordan skal estimationsmetoden gribes an ved et givet valg af polynomiums graden n?

Hvis der betragtes en α dimentionel stokastisk variabel, for $\alpha \in N(\mu,\Omega)$, hvor ρ er en vektor af E(P), og Ω er en positiv definit kovariansmatrice. På grund af uafhængigheds antagelsen er Ω en diagonal variansmatrice $\Omega = \text{dia}(\omega_1,\dots\dots\dots,\omega_m)$, hvor m er antal obligationer i stikprøven.

For at opstille en statistisk model antages, at P har en multivariat mormalfordeling med en middelværdi lig E(P) og en m x m positiv definit kovariansmatrice Ω ,således:

$$\underline{P} \sim N(E(\underline{P}), \underline{\boldsymbol{\Omega}}) \qquad (12)$$

For at opnå tilstrækkelig antal frihedsgrader er det nødvendigt at sætte restriktioner på antallet af ukendte parametre. Diskonteringsfunktionen er en funktion af tiden og en n + 1 - dimentionel parametervektor $a = (a_0,\dots\dots a_n)^T$, altså $q(t) = q(t,a)$ med en matrixnotation som $Q = Q(a)$ og $E(P) = E(P(a)) = BQ(A)$, hvor $B = b_{ijt}$ er en m x n cash-flow-matrice, hvis typiske element b_{ijt} repræsenterer cash-flowet fra den i'te obligation på tidspunkt t_j, for j = 1,2,3,....,n, og hvor der vil være nuller i matricen, hvis der intet cash-flow er på pågældende tidspunkt.

Ligeledes vil kovariansmatricen Ω være afhængig af en m - dimentional parameter vektor λ , således $\Omega = \Omega(\lambda)$, altså den statistiske model kan formuleres som:

$$\underline{P} \sim N(E(P(\underline{a})), \underline{\boldsymbol{\Omega}}(\lambda)) \qquad (13)$$

Ligningssystemet er nu fuldt beskrevet ved en α - dimentionel parametervektor hvor $\alpha = (a_0,a_1,\dots,a_n,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m)$. Givet normalfordelingsantagelsen kan de ukendte parametre estimeres efter et maximum likelihood-princip. Log-likelihood-funktionen kan ud-trykkes matematiske således:

$$\ln = -\frac{1}{2}\ln|\underline{\underline{\Omega}}| - \frac{1}{2}\epsilon^T \underline{\underline{\Omega}}^{-1}\epsilon \tag{14}$$

hvor

$$\epsilon = \underline{P} - E(\underline{P}) \tag{15}$$

og

$$\underline{\underline{\Omega}} = \begin{vmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_m^2 \end{vmatrix} \tag{16}$$

eller udtrykt således:

$$l_n = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \ln(\omega_i^2) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \frac{\epsilon_i^2}{\omega_i^2} \tag{17}$$

Princippet i maximum likelihood estimationen er at finde de parameterværdier a og λ der maksimerer loglikelihood funktionen, hvilket er equivalent med at løse minimeringsproblemet:

$$l_{n,\min} = \sum_{i=1}^{m} \ln(\omega_i^2) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\epsilon_i^2}{\omega_i^2} \tag{18}$$

idet der er blevet multipliceret igennem med 2.

Som problemet er opstillet, skal der - samtidig med, at der bliver estimeret n + 1 polynomiums koefficienter - estimeres lige så mange varianser, som der er obligationer i stikproben, hvilket naturligvis er en ganske uoverkommelig opgave. Problemet løses ved at finde et nøgletal, som kunne være et udtryk for variansen.

Jeg har som Chambers, Carleton og Waldmann valgt følgende specifikation for den enkelte obligations varians.

$$\omega_i^2 = s^2 V_i^d \tag{19}$$

hvor s^2 er en ukendt parameter, d er en ukendt parameter og V_i er den i'te obligations varighed.

Denne estimation af kovariansmatricen medfører, at antallet af ukendte variansparametre er blevet reduceret fra m til 2.

Det kan ud fra formel 19 ses, at hvis d = 0 reduceres udtrykket til:

$$\omega_i^2 = s^2 \tag{20}$$

altså for d = 0 fås homoskedasticitetstilfældet.

Det kan endvidere ses, at d > 0 svarer til stigende varians med stigende varighed og d < 0 til faldende varians med stigende varighed. Det kan altså udledes, at formel 19 tager højde for heteroskedasticiteten.

Dette medfører, at formel 18 kan omskrives til:

$$l_{n,\min} = \sum_{i=1}^{m} \ln(s^2 V_i^d) + \frac{1}{s^2} \sum_{i=1}^{m} V_i^{-d} \epsilon_i^2 \tag{21}$$

indsættes ε_i udfra formel 11 fås sluttelig:

$$l_{n,\min}(\underline{a}, s^2, d) = \sum_{i=1}^{m} (\ln(s^2) + d\ln(V_i)) + \frac{1}{s^2} \sum_{i=1}^{m} V_i^{-d} \left[P_i - \sum_{t=1}^{T} F_i(t)\, e^{(-\sum_{j=0}^{n} a_j t^{j+1})} \right]^2 \tag{22}$$

=

$$\sum_{i=1}^{m} (\ln(s^2) + d\ln(V_i)) + \frac{1}{s^2} \sum_{i=1}^{m} V_i^{-d} \left[P_i - \sum_{t=1}^{T} F_i(t)\, e^{(-\sum_{j=0}^{n} a_j t^{j+1})} \right]^2 \tag{23}$$

til simultan bestemmelse af de n + 3 ukendte parametre a_0, a_1,....., a_n, s^2, d.

Det kan udfra formel 22 og 23 udledes, at hvis d = 0 (dvs. homoskedasticitetstilfældet) vil s^2 og a kunne estimeres uafhængigt af hinanden, da a under alle omstændigheder skal vælges således, at de kvadrerede afvigelser af ϵ_i'erne minimeres.

Minimeringsproblemet givet ved formel 22 og 23 løses ved at finde de partielle afledede og sætte disse lig 0:

$$\frac{\partial(l_n)}{\partial(a_j)}=\frac{1}{s^2}\sum_{i=1}^{m} 2V_i^{-d}\left[P_i-\sum_{t=i}^{T} F_i(t)\,e^{\left(-\sum_{j=0}^{n} a_j t^{j+1}\right)}\right] \tag{24}$$
$$\times\left[\sum_{t=1}^{T} t^{j+1}F_i(t)\,e^{\left(-\sum_{j=0}^{n} a_j t^{j+1}\right)}\right] \quad \text{for } j=0,1,2,\ldots\ldots,n$$

$$\frac{\partial(l_n)}{\partial(s^2)}=\frac{m}{s^2}-\frac{1}{(s^2)^2}\sum_{i=1}^{m} V_i^{-d}\left[P_i-\sum_{t=1}^{T} F_i(t)\,e^{\left(-\sum_{j=0}^{n} a_j t^{j+1}\right)}\right]^2 \tag{25}$$

$$\frac{\partial(l_n)}{\partial(d)}=\sum_{i=1}^{m}\ln(V_i)+\frac{1}{s^2}\sum_{i=1}^{m} -V_i^{-d}\ln(V_i)\left[P_i-\sum_{t=1}^{T} F_i(t)\,e^{\left(-\sum_{j=0}^{n} a_j t^{j+1}\right)}\right]^2 \tag{26}$$

Dette ligningssystem kan dog ikke umiddelbart løses, derfor må der findes en passende numerisk iterationsmetode til løsning af det overordnede minimeringsproblem.

Når algoritmen er fundet, er der kun et udestående problem tilbage - hvordan vælges polynomiumsgraden n?

En meget nærliggende metode består i at øge polynomiumsgraden n indtil Akaikes informationskriterium, se Akaike (1977), er minimeret:

$$AIC=-2\,(l_n-F) \tag{27}$$

Hvor F er antal frihedsgrader - i dette tilfælde her n + 3 - nemlig antallet af uafhængigt estimerede parametre og hvor l_n er loglikelihood funktionens værdi efter estimationen af n'te gradspolynomiet.

Det vil sige, at hver gang polynomiets grad øges, kræves der en stigning i l_n på mindst 1 for, at approximationen er blevet forbedret.

Den øjeblikkelige forwardrentestruktur i kontinuerlig tid er givet ved:

$$r(t) = -\frac{d}{dt}\ln(q(t)) \tag{28}$$

hvor

$$q(t) = e^{(-\sum_{j=0}^{n} a_j t^{j+1})} \tag{29}$$

Forwardrentestrukturen kan udtrykkes således i kontinuerlig tid:

$$r(t) = \sum_{j=0}^{n} (j+1) a_j t^j \tag{30}$$

og i diskret tid

$$r(t) = e^{(\sum_{j=0}^{n} (j+1) a_j t^j)} - 1 \tag{31}$$

Det er blevet vist af Cox, Ingersoll og Ross (1981), at den lokale forventningsterori er den eneste rentestrukturteori, som er konsistent med en ligevægtsbetragtning for rentestrukturen. Den lokale forventningsteori kan formuleres således:

$$E_t\left[\frac{P_{t+1}(s-1) - P_t(s)}{P_t(s)}\right] = r_t^f \tag{32}$$

som medfører, at det forventede en periode afkast på alle obligationer er equivalent med en periode spotrenten. Givet LEH findes obligationsprisen ved:

$$P_t(s) = E_t\left[\frac{1}{(1+r_t^f)(1+r_{t+1}^f)\ldots\ldots(1+r_{t+s-1}^f)}\right] \tag{33}$$

formel 29 og 30 er opstillet under antagelse om usikkerhed. Hvis renterne skal betragtes under fuld sikkerhed, skal forventningsoperatoren bare udelades.

Bestemmelse af rentestrukturen givet den lokale forventningsteori, dvs. bestemmelse af de på tidspunkt s estimerede parametre på tidspunkt s + 1 givet LEH, gøres på følgende måde:

$$\left(1+\frac{q(1,s,\underline{a}_s)-q(T+1,s,\underline{a}_s)}{q(T+1,s,\underline{a}_s)}\right)^{\frac{1}{t+1-1}}=R_{LH}(T,s+1,\underline{a}_{s+1}) \qquad (34)$$

hvor parametrene i parentesen skal forstås som henholdsvis nulkuponobligationens løbetid, observationstidspunktet og parametrene givet observeringstidspunktet.

5 Konklusion

Jeg har i dette papir gennemgået problemerne ved estimeringen af rentestrukturen, endvidere blev en stor del af de løsningsforslag, som er blevet anvist i litteraturen, kort gennemgået.

Den valgte løsningsmetode, som hovedsageligt bygger på Chambers, Carleton og Waldmann's artikel, blev nøjere analyseret, og en løsningsmetode blev foreslået.

Den valgte metode lider dog også af visse skavanker. Den er for det første kompleks at estimere, og for det andet lider den af de almindelige uheldige egenskabaer ved estimation ud over en løbetid på ca. 16 år.

Dette problem vil blive taget op til en nøjere efterforskning i et senere working paper, og det er selvfølgelig ikke umuligt, at en anden rentestruktur estimation vil blive foreslået.

Jeg mener dog på trods af nævnte skavanker, at den her anviste metode, med den viden der haves i dag om estimering af den "lange" ende af rentestrukturen, er utrolig effektiv i sin bestemmelse af rentestrukturen.

Litteraturliste

1) Akaike 1977
"On entropy maximazation principle", in P. R. Krishnaiah, "Application of statistics", North Holland Publishing Company 1977

2) Carleton og Cooper 1976
"Estimation and uses of the term structure of interest rates"
Journal of Finance 31 (september): 1067-1083

3) Chambers, Carleton og Waldmann 1984
"A new approach to the estimation of the term structure of interest rates"
Journal of Finandial and Quantitative Analysis 19 (september): 233-254

4) Jordan 1980
"Studies in direct estimation of the term structure"
Unpublished Ph. D dissertation, university of North Carolina. Chapel Hill 1980

5) Langetieg og Smoot 1981
"An appraisal of alternative spline methodologies for estimating the term structure of interest rates"
Working Paper, university of Southern California, december 1981.

6) Livingston og Jain 1982
"Flattening of bond yield curves for long maturities"
Journal of Finance 37 (marts): 157-167

7) Maikel 1962
"Expectations, bond prices and the term structure of interest rates"
Quarterly journal of Economics (maj): 197-218

8) Mcculloch 1971
"Measuring the term structure of interest rates"
Journal of Business (januar): 19-31

9) Nelson og Siegel 1987
"Parsimonious modeling of yield curves"
Journal of Business (oktober): 473-489

10) Nelson og Siegel 1988
"Long-term behavior of yield curves"
Journal of financial and quantitative analysis (marts): 103-110

11) Shea 1984
"Pitfalls in smoothing interest rate term structure data: equilibrium models and spline approximations"
Journal of financial and quantitative analysis (september): 253-269

12) Vasicek og Fong 1982
"Term structure modeling using exponential splines"
Journal of finance (maj): 339-348