PRISFASTSÆTTELSE AF OBLIGATIONER I KONTINUERT TID

Claus Madsen
version efteråret 1992
revideret 11. januar 1994
revideret 31. august 1994
revideret 30. oktober 1995

e-mail: cam@fineanalytics.com

Prisfastsættelse af obligationer i kontinuert tid[1].

1. Indledning

I dette arbejdspapir vil jeg foretage en analyse og en diskussion af en række af de kontinuerte modeller til prisfastsættelse af obligationer, der er blevet foreslået i litteraturen - dvs til estimation af rentestrukturen.

I den anledning vil der kun blive betragtet kontinuerte modeller med tidshomogene parametre. Endvidere vil behandlingen af stokastisk volatilitet være sparsom[2].

Arbejdspapiret vil endvidere indeholde nogle betragtninger omkring optionsprisfastsættelse, herunder aktie-optioner.

Jeg vil indlede med i afsnit 2 kort at diskutere en lang række af de modeller, der er blevet introduceret i litteraturen. Herefter vil afsnit 3 behandle de mest kendte en-faktor modeller for rentestrukturen. Herunder vil jeg udlede de analytiske udtryk for henholdsvis CIR og Vasicek modellerne. I afsnit 3 vil der endvidere blive gjort nogle betragtninger omkring prisfastsættelse af aktie-optioner, med specielt henblik på den allestedsnærværende Black og Scholes (1973) model.

I afsnit 4 vil jeg foretage en kort diskussion af problemerne ved at beskrive dynamikken i rentestrukturen ved en-faktor modeller. Dette vil automatisk lede mig over i afsnit 5, som beskæftiger sig med fler-faktor ligevægtsbaserede modeller for rentestrukturen. De modeller, som vil blive taget op, er Brennan og Schwartz (1979),(1980),(1982), Walter (1995), Vasicek og Fong (1991) og Longstaff og Schwartz (1990), (1992).

I afsnit 6 vil jeg foretage en nærmere gennemgang af den flerdimensionelle Vasicek model. Jeg vil her betragte Beaglehole og Tenneys (1991) multifaktor model, herunder deres såkaldte "double-decay" model, dog analyseret med udgangspunkt i Langetieg (1980).

---

[1] Dette notat er en revidering og omskrivning af et notat fra efteråret 1992. Den grundlæggende forskel imellem de to notater er, at der i dette notat er frasorteret alle de generelle betragtninger omkring stokastiske processer samt selve udledningen af Itos lemma. Dette notat er derimod udbygget med nogle betragtninger omkring fler-faktor stokastiske modeller.

[2] Stokastiske modeller med tidsafhængige parametre er bl.a. behandlet i Hull og White (1993), Kijima og Nagayama (1995), Jamshidian (1991) og Black, Derman og Toy (1990). Hvad angår modeller med stokastisk volatilitet kan nævnes Dupire (1993)/(1995).

I afsnit 7 vil jeg foretage en kort introduktion af en ny type af rentestrukturmodeller, nemlig de ikke-lineære stokastiske modeller, såsom den kvadratiske multi-faktor model af Beaglehole og Tenney (1991) og Jamshidian (1993) samt Longstaff (1989) "double-square-root" model. Endvidere vil den nye ikke-lineære modeltype fra Constantinides (1992) blive behandlet.

2. Ligevægtsmodeller for dynamikken i rentestrukturen

Til bestemmelse af dynamikken i rentestrukturen eksisterer principielt to typer af modeller, nemlig de ligevægtsbaserede og de arbitragebaserede.

Ligevægtsbaserede modeller, såsom Cox, Ingersoll og Ross (1985) (CIR), Vasicek (1977), Courtadon (1982) og Dothan (1978), fokuserer hovedsageligt på prisfastsættelse af obligationer ud fra den aktuelle værdi af den øjeblikkelige spotrente (den risikofri rente). I disse modeller fungerer den aktuelle spotrente som dynamikkens underliggende tilstands-variabel.

Obligationsudtryk findes herefter ved at løse en partiel differentialligning, som fremkommer ud fra forudsætninger - enten eksplicitte eller implicitte - omkring præferencestrukturen og dynamikken i den underliggende tilstandsvariabel. En konsekvens af at anvende denne metode er, at det ofte er nødvendigt med temmelig restriktive præferenceantagelser for, at det er muligt at finde et analytisk udtryk (closed-form-solution) for den resulterende partielle differentialligning.

For eksempel kan det påpeges, at CIR, Dothan og Courtadon antager en logaritmisk præferencestruktur.

Vasiceks metode afviger herfra i og med, at han ikke eksplicit foretager nogle antagelser omkring præferencestrukturen, men gør dette implicit, når både dynamikken i spotrenten og markedsrisikoparameteret er specificeret. Det forhold, at Vasicek ikke eksplicit fastlægger præferencestrukturen, medfører, at hans model i litteraturen går under navnet en arbitragemodel.

Jeg vil på trods heraf betragte Vasiceks model som hørende til familien af ligevægtsbaserede modeller. Årsagen hertil er, at de arbitragebaserede modeller betragter jeg som dem der tager initialrentestrukturen for givet, og herefter opstiller restriktioner på, hvorledes diskonterings-funktionen/rentestrukturen kan bevæge sig over tid, uden at disse bevægelser kolliderer med det risikofri arbitrage-argument. Dette betyder altså, at denne metode pga. konstruktionen vil matche initialrentestrukturen. Modeller som tilhører denne familie, er bl.a. Ho og Lee (1986) og Heath, Jarrow og Morton (1987), (1991)[3].

[3] For en nærmere behandling af de arbitragebaserede modeller henvises til Madsen (1995b).

Et resultat af at anvende ligevægtsmetoden er, at den resulterende obligationsprisfunktion er præferenceafhængig. Denne fastlæggelse af præferencestrukturen har dog sine fordele, i og med at givet parameterværdierne, kan priserne på alle obligationer uanset løbetid bestemmes. Dette betyder altså, at hele rentestrukturen kan fastlægges ved kun at kende et lille antal parametre.

Det kan altså konkluderes, at ligevægtsmodeller først forudsætter at de valgte tilstandsvariable (generelt en - nemlig spotrenten) indeholder tilstrækkelig statistik til at beskrive hele rentestrukturen. Derefter antager disse modeller, at tilstandsvariablene ikke kun er i stand til at beskrive hele initialrentestrukturen men også dynamikken i rentestrukturen. Disse forudsætninger bliver foretaget, da hovedformålet med modellerne er at modellere dynamikken i obligationspriserne ved anvendelse af kun et lille antal faktorer.

De ligevægtsmodeller der blev nævnt foroven, er alle det der kaldes en-faktor modeller, da der kun er en tilstandsvariabel, der beskriver dynamikken i rentestrukturen.

Det at lade rentestrukturen være drevet af kun en faktor, har selvfølgelig nogle mere eller mindre uheldige egenskaber.

Dette har medført, at der i litteraturen har været foreslået modeller, som indeholder mere end en faktor. En af de tidligste og nok mest kendte modeller, som indeholder mere end en faktor, er Brennan og Schwartz (1979), (1980), (1982) to-faktor model. I deres model er de to faktorer repræsenteret ved den risikofri rente og konsolrenten.

En anden model, som er meget oppe i tiden, er Longstaff og Schwartz (1990), (1992) to-faktor model. Her er faktorerne den risikofri rente og volatiliteten i den risikofri rente.

En række empiriske undersøgelser har påvist, at den overvejende variation i rentestrukturen kan forklares med 3 faktorer, se bl.a Litterman og Scheinkmann (1988) og Garbade (1986) på det amerikanske marked. For det danske marked se Dahl (1989) og Madsen (1995a). På trods heraf er der endnu ikke blevet præsenteret en decideret 3-faktor ligevægtsmodel for dynamikken i rentestrukturen der duplikerer disse faktorer. Brennan og Schwartz (1982) nævner da også i forbindelse med en empirisk analyse af deres model, at der er noget der taler for, at der mangler endnu en faktor, og at denne ene faktor formentlig skal være en volatilitetsfaktor.

Hovedgrunden til at der endnu ikke er blevet foreslået en decideret 3-faktor ligevægtsmodel, kan formentlig forklares ved, at det for det første måske ikke er indlysende, hvilke faktorer der skal vælges. For det andet er det heller ikke indlysende, om en eller flere af tilstandsvariablenes processer skal indeholde mean-reversion eller ej. For det tredie et det en nødvendighed, at præferencestrukturen er af en logaritmisk form, for at en analytisk løsning overhovedet kan findes. Et sidste forhold er overvejelsen omkring hvilken variansspecifikation, der skal foretages for hver af tilstandsvariablenes processer, hvor den mest "tractable" er en normalfordelingsantagelse, med de deraf afledte uheldige konsekvenser.

Det er nok lidt firkantet formuleret, at der ingen fler-faktormodeller eksisterer, i og med at Langetieg (1980) faktisk har defineret en multi-faktor rentestrukturmodel, indeholdende en normalfordelingsantagelse. Selvom det er muligt at finde et analytisk udtryk for Langetiegs multi-faktor model, er der visse intuitive problemer med hans model i og med, at tilstandsvariablene ikke bliver specificeret, og det ikke er helt indlysende, hvad de faktisk skal være.

Dette modelframework fra Langetieg er dog så generelt, at en lang række af specifikke modeller under normalfordelingsbetingelsen kan betragtes som grænsetilfælde i Langetiegs temmelig generelle modelformulering.

Et eksempel på dette er en to-faktor model foreslået af Beaglehole og Tenney (1991), den såkaldte "double-decay" model[4].

Det vigtigste bidrag fra Beaglehole og Tenney (1991) er dog ikke denne to-faktor model, men derimod introduktionen af en såkaldt multifaktor kvadratisk rentestrukturmodel[5]. Denne kvadratiske rentestrukturmodel, er en såkaldt ikke-lineær model, og kan i den forbindelse betragtes som en udvidelse af Longstaff (1989) "double-square" model, der var den første ikke-lineære rentestrukturmodel, der blev introduceret.

En uheldig egenskab ved den kvadratiske rentestrukturmodel er, at det ikke umiddelbart ser ud til, at det er muligt at finde analytiske udtryk for obligationsprisen for andet end i det en-dimensionelle tilfælde. En alternativ model i det ikke-lineære framework, hvor det faktisk er muligt at finde analytiske udtryk for obligationspriser i en multi-faktor model, er derimod blevet foreslået af Constantinides (1992).

Slutteligt kan nævnes Duffie og Kans (1993) multi-faktor model, som principielt kan forstås som en multi-faktor CIR-model, dvs at bl.a. Chen og Scotts (1993) to-faktor CIR-model kan indeholdes som grænsetilfælde i dette framework.

Et fundamentalt krav til stokastiske modeller i bred forstand er selvfølgelig at det for en lang række af de mere ordinære fordringer, såsom eksempelvis nulkuponobligationer og europæiske optioner, skal være muligt at finde analytiske udtryk. Dette sætter selvfølgelig en række begrænsninger på, hvorledes en proces for rentestrukturen skal specificeres. En sidste ønskværdig egenskab ved specifikationen af en meningsfuld fler-faktor model er fra en praktisk synsvinkel selvfølgelig den, at tilstandsvariablene skal kunne observeres i markedet.

En række af de ovenfor nævnte modeller har bl.a. ikke den egenskab, at der eksisterer nogen analytisk løsning, hvilket har den implikation, at disse modeltyper er af mindre praktisk inter-

[4] Af andre modeller, der er foreslået, og som kan indeholdes i Langetiegs modelframework kan f.eks. nævnes 3-faktor modellen fra Kraus og Smith (1993).

[5] Se også Jamshidian (1993).

esse.

3: En-faktor stokastiske modeller

Usikkerheden i økonomien er, som vanligt, defineret ved et sandsynlighedsrum (Ω,F,P), hvor Ω angiver hele udfaldsrummet, P er et sandsynlighedsmål og F er hændelsesrummet. Det antages samtidig, at der eksisterer en m-dimensionel Wiener proces $W = [W(t);0 < t \leq T < \tau]$, hvor komponenterne $W_i(t)$, for $i = \{1,2,....,m\}$ er uafhængige[6] en-dimensionelle Wiener processer med en drift lig nul (0) og en varians lig en (1).

I dette afsnit er det kun det en-dimensionelle tilfælde der betragtes.

Jeg vil nu opstille en en-faktor kontinuert model for rentestrukturen, hvor denne ene faktor er den risikofri rente.

$$dr(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW$$

Det antages her, at den risikofri rente følger en stokastisk proces af Ito-typen således;
hvor μ(t) som er kendt på tidspunkt t er en tidsafhængig driftskoefficient, σ(t), som også er kendt på tidspunkt t, er en tidsafhængig diffusionskoefficient og dW er en Wiener proces med følgende egenskaber: $(dW)^2 = dt$, $dtdW = 0$ og $(dt)^2 = 0$.

Hvis det antages, at der eksisterer en fordring P(t,T), som kun er afhængig af r og t, vil den stokastiske proces for P(t,T) ifølge Itos lemma tilfredsstille følgende partielle

$$\frac{dP}{P} = \mu_P dt + \sigma_P dW$$

$$hvor \quad \mu_P = \left[P_t + P_r\mu(t) + \frac{1}{2}P_{rr}\sigma^2(t) \right]$$

$$og \quad \sigma_P = P_r\sigma(t)$$

differentialligning (PDE)[7]:
Fodtegnene repræsenterer partielle afledte.

[6] Uafhængighedsantagelsen er dog ikke et fundamentalt krav. Det er kun fremsat her af praktiske årsager. En slækkelse på denne antagelse vil da også blive foretaget senere i notatet.

[7] I dette notat anvender jeg i flæng P og P(t,T) som et udtryk for prisen på en nulkuponobligationer på tidspunkt t der udløber på tidspunk T.

Ved anvendelse af det risikofri arbitrageargument[8] kan den søgte parabolske differentialligning, som alle fordringer P(t,T) skal tilfredstille for at udelukke arbitragemuligheder, formuleres som:

[8] Formel 3 er som nævnt fremkommet ved anvendelse af det risikofri arbitrageargument. Argumentet er som følger:

Betragt nu dynamikken i porteføljen X:

$$dX = hdP_1 + (1 - h)dP_2$$

Hvor dette udtryk er af samme form som det fundamentale udgangspunkt i udledningen af den partielle differentialligning, når den fordring som driver prisen på P er en "observerbar" fordring; dvs ovenstående relation kan betragtes som værende udgangspunktet i udledningen af Black og Scholes (1973) formel. I Black og Scholes udledning vil det ene P repræsentere aktieprisen og det andet P prisen på det afledte instrument - optionen.

Forklaringen på, at der kun behøves to fordringer til at generere en risikofri portefølje, er, at der præcis behøves 1+antal usikkerhedsfaktorer (antal Wiener processer).

Processen for porteføljen X kan nu skrives som:

$$\begin{aligned} dX &= h[\mu_{P_1} dt + \sigma_{P_1} dW] + (1 - h)[\mu_{P_2} dt + \sigma_{P_2} dW] \\ &= [h\mu_{P_1} + (1 - h)\mu_{P_2}] + [(1 - h)\sigma_{P_2} - h\sigma_{P_1}]dW \end{aligned}$$

Vælg nu h, således at porteføljen X er risikofri.

Det har den implikation, at h skal fastlæggelse således at:

$$[(1 - h)\sigma_{P_2} + h\sigma_{P_1}] = 0$$

da dette betyder at:

$$[h\mu_{P_1} + (1 - h)\mu_{P_2}] = r$$

Det kan herudfra udledes, at h er givet ved:

$$h = \frac{\sigma_{P_2}}{\sigma_{P_2} - \sigma_{P_1}}$$

Endvidere ses det tydeligt, at:

$$\frac{\mu_{P_1} - r}{\sigma_{P_1}} = \frac{\mu_{P_2} - r}{\sigma_{P_2}}$$

Hvor dette udtryk viser, at merafkastet for hver enhed af risiko for den ene fordring er lig merafkastet for hver enhed af risiko for den anden fordring.

Det viser sig altså, at markedsrisikoparameteren er identisk for alle fordringer, der kun er en funktion af r og t, således:

$$\frac{\mu_P - r}{\sigma_P} = \lambda$$

Ved at indsætte udtrykket for henholdsvis driften og volatiliteten i obligationspriserne fra formel 2 heri ses det, at dette vil resultere i et udtryk, som er identisk med relationen fra formel 3, for $\Gamma(t) = \lambda\sigma(t)$.

$$P_t + P_r\ [\mu(t) - \Gamma(t)] + \frac{1}{2}P_{rr}\sigma^2(t) - rP = 0$$

Dette udtryk er som bekendt blevet udledt under den antagelse, at den stokastiske tilstandsvariabel ikke var en "observerbar"[9] fordring, eftersom markedsrisikoparameteren $\Gamma(t)$ indgår i den fundamentale partielle differentialligning.

3.1 Prisfastsættelse af aktie-optioner

Hvis nu jeg alternativt betragter det mere simple tilfælde, nemlig at den stokastiske variabel er en "observerbar" fordring, eksempelvis en aktie, vil dette medføre, at en af P`erne bliver en prisfunktion af formen P = r. Dvs prisen er nu selv en tilstandsvariabel. Det andet P kommer nu til at repræsentere en afledt fordring, eksempel en option, dvs $P^o = P$. Dette resulterer i en

$$P_t + P_P[\mu(t) - \Gamma(t)] + \frac{1}{2}P_{PP}\sigma^2(t) = rP$$
$$\Rightarrow \mu(t) = rP + \Gamma(t)$$

mere simpel partiel differentialligning for denne fordring, som kan vises således:

$$P^o_t + P^o_P[rP + \Gamma(t) - \Gamma(t)] + \frac{1}{2}P^o_{PP}\sigma^2(t) = rP^o$$
$$\Rightarrow P^o_t + P^o_P rP + \frac{1}{2}P^o_{PP}\sigma^2(t) = rP^o$$

Indsættes dette i formel 3, får man:
For $\sigma^2(t) = \sigma^2 P^2$ degenererer denne formel til den oprindelige Black og Scholes (1973) formel.

[9] Det skal her nævnes, at udtrykket "observerbar" fordring er anvendt til at definere, om en fordring er handlebar. I den forbindelse skal det pointeres, at renter, inflationssatser ol. ikke er at betragte som "observerbare" fordringer.

Black og Scholes modellen er det man i diffusionsteorien kalder for en Geometrisk Brownsk bevægelse[10], da μ og σ er antaget at være konstante. I den slags tilfælde vil priserne være stationære og lognormalfordelte, dvs priserne kan ikke blive negative[11].

Hvis man nu alternativt vælger en mere generel beskrivelse for $\sigma^2(t)$, er følgende definition helt generel for en lang række af de i litteraturen foreslåede optionsprisfastsættelsesmodeller

$$\sigma(t) = \sigma P^{\frac{\alpha}{2}}; \qquad 0 \leq \alpha \leq 2$$

på aktier:
Her er α en elasticitetsfaktor, og hvor $\alpha = 2$ resulterer i den traditionelle Black og Scholes model.

Baggrunden for, at modeller af denne type er blevet foreslået i litteraturen, er, at det i USA er observeret, at der er en tendens til, at volatiliteten er invers relateret til aktieprisen.

Modeller, hvor diffusionskoefficienten er defineret som i formel 6, går under navnet "constant-elasticity-of-variance" modeller - eller bare CEV-diffusionsmodeller.

De 2 mest kendte CEV-modeller er den såkaldte square-root model ($\alpha = 1$) og den absolutte model ($\alpha = 0$)[12].

3.2 En-faktor modeller for prisdannelsen på obligationer

Lad mig nu genkalde udtrykket for den proces alle fordringer, der kun er en funktion af r og t,

$$P_t + P_r \mu(t) + \frac{1}{2}P_{rr}\sigma^2(t) - P_r\Gamma(t) - rP = 0$$

skal opfylde nemlig formel 3, således:
Det, der adskiller de enkelte fordringer, er randbetingelsen. For en nulkuponobligation er randbetingelsen givet ved, at P(T,T)=1. Løsning af formel 7 under hensyntagen til denne randbetingelse giver diskonteringsfunktionen for alle t.

Herefter kan rentestrukturen findes således:

[10] Se Karlin og Taylor kap. 15 (1981)

[11] I Appendix A er der i den forbindelse foretaget en udledning af de analytiske udtryk i henholdsvis Black og Scholes (1973) modellen og Black (1976) modellen.

[12] For en nærmere beskrivelse af CEV-modellerne henvises til Cox og Ross (1976) og Beckers (1980).

$$R(t,T) = -\frac{\ln P(t,T)}{T}$$

$$r^F(t,T) = -\frac{\delta \ln P(t,T)}{\delta T}$$

Forwardrentestrukturen kan beskrives således:
De 3 første led i formel 7 stammer fra Itos lemma og er et udtryk for den forventede prisændring på obligationen over et uendeligt kort tidsinterval. Dette betyder altså, at de 2

$$E(\underline{r}) = r + \Gamma(t)\frac{P_r}{P}$$

sidste led må repræsentere det forventede afkast på obligationen, som kan omskrives til:
Det kan udledes, at hvis risikopræmien er lig nul, er det forventede afkast over et uendeligt kort tidsinterval ens for alle obligationer og endog lig med den risikofri-rente[13]. Et andet interessant forhold er, at den øjeblikkelige risikopræmie er proportional med obligationens priselasticitet/modificeret varighed. Det kan endvidere udledes, at hvis risikoparameteren er negativ, vil positive risikopræmier optræde, eftersom obligationers priselasticitet pr. definition er negativ[14].

Den procentuelle prisændring på en nulkuponobligation vil udvikle sig i henhold til følgende

$$\frac{dP}{P} = \mu_P dt + \sigma_P dW$$

$$hvor \quad \mu_P = \left[P_t + P_r \mu(t) + \frac{1}{2} P_{rr} \sigma^2(t) \right]$$

$$og \quad \sigma_P = P_r \sigma(t)$$

formel:
Eftersom det er en-faktor modeller, der her betragtes, er afkastet på alle obligationer fuldstændig korreleret.

Principielt skulle risikoparameteren bestemmes ud fra markedsdeltagernes nyttefunktioner; en alternativ mulighed er at estimere Γ(t) ud fra det tilgængelige datamateriale - dvs antage at risikoparameteren er konstant. I forbindelse med risikopræmieparameteren skal det også nævnes, at en naturlig indfaldsvinkel ville være at antage en eller anden funktionel form for risikopræmien. Men her er det nødvendigt, at den antagede funktionelle form ikke er inkonsi-

[13] Det kan altså udledes, at den lokale forventningsteori kun er fremherskende, hvis risikopræmien er lig 0.

[14] Denne udtalelse er dog kun korrekt, sålænge den betragtede rentestrukturmodel tilhører den lineære klasse, se afsnit 7.

stent med en ligevægtsbetragtning[15].

Alle kontinuerte en-faktor modeller for rentestrukturens udvikling over tid har formel 7 som den grundlæggende prisfunktion. Det, der adskiller de enkelte modeller fra hinanden, er specifikationen af drifts- og diffusionskoefficienten.

[15] Se Madsen (1994a).

$$\mu(t) = \kappa(t)[\theta(t) - r]$$

$$og \qquad \sigma(t) = \sigma(t)r^o \qquad for\ o \in [0,\frac{1}{2},1]$$

En forholdsvis generel beskrivelse af en-faktor modellerne er følgende 2 specifikationer[16]: Dette medfører, at en generel partiel differentialligning, der indeholder en række af de

$$P_t + P_r\kappa(t)[\theta(t) - r] + \frac{1}{2}P_{rr}\sigma(t)^2r^{2o} - P_r\Gamma(t)r^o - rP = 0$$

modeller, der har været analyseret i litteraturen som grænsetilfælde, kan skrives således: Modeller af typen demonstreret/vist ved formel 13, under hensyntagen til at parametrene er tidshomogene, er bl.a. udledt af Vasicek (1977), Dothan (1978), Courtadon (1982), Cox, Ingersoll og Ross (1985). Det mere generelle tilfælde med tidsafhængige parametre i diffusionsprocessen er bl.a. analyseret i Hull og White (1990) og Kijima og Nagayama (1995)[17].

Jeg vil gennemgå følgende modeller i nævnte rækkefølge: Vasicek, Dothan, Courtadon og Cox, Ingersoll og Ross.

3.2.1 Vasicek

Ved at sætte o = 0, $\kappa > 0$, og ved endvidere at antage at κ og θ er tidsuafhængige, fremkommer den model, som oprindeligt blev opstillet af Vasicek. Processer med egenskaben, at $\kappa \neq 0$ går under navnet Ornstein-Uhlenbeck processer, og når det endvidere antages, at $\kappa > 0$ kaldes det for en elastisk-random-walk proces[18]. Dette medfører, at den endelige prisfunktion får føl-

$$P_t + P_r\kappa[\theta - r] + \frac{1}{2}P_{rr}\sigma^2 - P_r\lambda\sigma - rP = 0$$

gende udseende[19]:
I denne formel er κ, θ og σ positive konstanter. Den øjeblikkelige drift $\kappa(\theta - r)$ repræsenterer

[16] En alternativ formulering af diffusionskoefficienten er foretaget af Duffie og Kan (1993), nemlig $\sigma(t) = \sqrt{\sigma_0 + \sigma_1 r}$, hvor dette udtryk degenererer til relationen fra formel 12 for $\sigma_0 = 0$ og o = 0.5.

[17] Der henvises til Madsen (1995b) for en nærmere analyse af spotrenteprocesser med tidsafhængige parametre.

[18] I forbindelse med den elastiske-random-walk model er renterne normalfordelte. Det medfører, at spotrenten vil blive drevet imod positive og negative værdier med sandsynligheden 1.

[19] Denne formel er ækvivalent med Vasiceks formel 15, under den forudsætning at hans f er defineret som i hans formel 24.

en kraft, som tvinger processen imod dens langsigtede middelværdirenteniveau θ med en kraft proportional i forhold til afstanden fra dette langsigtede middelrenteniveau. κ er en konvergerings-hastighedsparameter, hvor for $\kappa \to \infty$ går renten mod middelrenteniveauet κ. Endvidere antager Vasicek, at præferencestrukturen Γ(t) er en konstant, dvs $\Gamma(t) = \lambda\sigma$.

3.2.2 Dothan

Ved at sætte o = 1 og κ = 0 fås den partielle differentialligning, som blev udledt af Dothan

$$P_t + \frac{1}{2}P_{rr}\sigma^2 r^2 - P_r\lambda r\sigma - rP = 0$$

(1978)[20]:
Risikopræmien er her blevet defineret ud fra en simpel ligevægtsmodel for økonomien, hvor det er antaget, at investeringsmulighederne er deterministiske, og hvor investorerne antages at have en logaritmisk nyttefunktion. Risikopræmien kan ud fra ovenstående udtryk indses at

$$\Gamma(t) = \lambda r\sigma$$

have følgende udseende:

3.2.3 Courtadon

Ved at sætte o = 1 og $\kappa \neq 0$ fås følgende partielle differentialligning, som blev udledt af

$$P_t + P_r\kappa[\theta - r] + \frac{1}{2}P_{rr}\sigma^2 r^2 - P_r\lambda r\sigma - rP = 0$$

Courtadon (1982):
Denne er af samme form som hans formel 7a.

Courtadon anvender resultatet for risikopræmien, som udledt af Dothan (1978) i opstillingen af formel 17.

3.2.4 Cox, Ingersoll og Ross

Ved at sætte o = 0.5 og $\kappa \neq 0$ kan Cox, Ingersoll og Ross` oprindelige model findes. Det skal dog hertil siges, at de i bestemmelsen af risikopræmieparameteren, som Dothan gør anvendelse af en ligevægtsmodel for økonomien, dog med stokastisk varierende investeringsmuligheder og hvor investorerne antages at have en logaritmisk nyttefunktion. Deres resultat bliver også af formen givet ved formel 16 dog normeret i forhold til spredningen σ. Dette medfører, at Cox, Ingersoll og Ross` model kan formuleres således:

[20] Dette udtryk er ækvivalent med Dothans formel 3.

$$P_t + P_r\kappa[\theta - r] + \frac{1}{2}P_{rr}\sigma^2 r - P_r\lambda r - rP = 0$$

De fire modeller, som her er blevet kort gennemgået, resulterer alle i en fundamental differentialligning, som alle fordringer, der kun er en funktion af de valgte tilstandsvariable og tiden skal opfylde for at udelukke arbitragemuligheder. Man kunne i den forbindelse blive foranlediget til at kalde modeller af ovenstående type for globalt arbitragefri. På samme måde vil det være naturligt at betragte modeller af Black og Scholes typen som "kun" værende lokalt arbitragefri.

I obligationsteori vil pendanten til lokalt arbitragefri modeller være en direkte modellering af den stokastiske proces for obligationspriserne, dvs obligationsprisen er selv en tilstandsvariabel. En sådan specificering er bl.a. foreslået af Schaefer og Schwartz (1987), Ball og Torous (1983), Rady og Sandmann (1994) og Nawalkha (1995) i forbindelse med prisfastsættelse af optioner på obligationer. Da modeller af denne type ikke beskæftiger sig med fastlæggelse af rentestrukturen, eftersom obligationspriserne pr. definition er antaget at være givet, skal jeg ikke yderligere beskæftige mig med modeller af denne type. En sådan indfaldsvinkel kan da også nærmere betragtes som en mulighed for at anvende Black og Scholes optionsvalueringsprincip for aktier direkte på obligations-optioner[21].

3.3 Løsning af den partielle differentialligning

Af de modeller, som ovenfor er blevet gennemgået, er det kun Cox, Ingersoll og Ross modellen og Vasicek modellen det er muligt at løse analytisk[22]. Det er bl.a. muligt at finde analytiske udtryk for prisen på en nulkuponobligation, prisen på en option på en nulkuponobligation og prisen på en option på en kuponobligation. I dette arbejdspapir vil jeg dog indskrænke mig til at betragte udtryk for prisen på en nulkuponobligation[23].

I forbindelse med løsningen af partielle differentialligninger findes der en række forskellige metoder. Bl.a. kan nævnes, at Cox, Ingersoll og Ross (CIR) (1985) selv udledte deres model med udgangspunkt i et resultat fra Feller (1951). En alternativ løsningsmetode blev anvendt af Jamshidian (1987) som fandt CIRs (1985) analytiske udtryk ved at anvende Greens-funktion. En tredie metode blev brugt af Vasicek (1977), som løste sin partielle differentialligning ved at tage udgangspunkt i det ækvivalente martingale mål.

[21] Der henvises til Appendix B for en nærmere diskussion af modeller, der direkte fokuserer på den stokastiske proces for obligationspriserne, og de problemer dette kan medføre.

[22] Dothan udleder dog også et analytisk udtryk af temmelig kompleks karakter. I og med at hans udtryk indeholder en dobbelt integrering over et semi-uendeligt interval samt Bessel funktioner af 2. orden.

[23] I Madsen (1995c) er prisfastsættelse af optioner og i det hele taget afledte instrumenter i bred forstand - en m-dimensionel model - uddybende behandlet under hensyntagen til normalfordelingsantagelsen.

Jeg vil her hvad angår Vasiceks model vise, hvorledes det analytiske udtryk kan findes ved at anvende Feynman-Kac løsningen[24].

I forbindelse med Feynman-Kac løsningen vil der blive anvist to metoder til at få den partielle differentialligning på den risikoneutrale form. Nemlig ved anvendelse af det risikofri arbitrageargument som præcis var indfaldsvinklen anvendt i afsnit 3 og alternativt ved at anvende det ækvivalente martingale mål.

Forklaringen på, at Feynman-Kac løsningen kræver, at spotrenteprocessen skal være på sin risikoneutrale form, er nemlig den, at driften i spotrenteprocessen skal være identisk med koefficienten til leddet P_r i den endelige partielle differentialligning[25]. Dette er præcis tilfældet, hvis den risikoneutrale spotrenteproces betragtes.

I afsnit 6 vil en generel m-faktor normalfordelt model som Langetiegs (1980) model blive analyseret nøjere. Der vil her vil blive udledt et analytisk udtryk for denne model, hvor der er inkorporeret korrelation mellem de enkelte Wiener processer. Endvidere vil det blive vist, at denne model indeholder Vasiceks model som special tilfælde.

Lad mig dog indledningsvis genkalde den partielle differentialligning for Vasicek modellen,

$$P_t + P_r\kappa[\theta - r] + \frac{1}{2}P_{rr}\sigma^2 - P_r\lambda\sigma - rP = 0$$

således:
med randbetingelse P(T,T) = 1.

3.3.1 Martingale approachet

Det antages, at der eksisterer et unikt sandsynlighedsmål Q på Ω, som er ækvivalent til P, således at den diskonterede pris på enhver fordring er en Q-martingale.

Derfor vil den normerede prisproces P(t,T)/M(t) blive betragtet, hvor processen for P(t,T) er

$$dM(t) = rdt$$

defineret ved formel 11, og M(t) er givet ved:

eftersom spotrenten er kendt på forhånd, vil det nemlig være således, at processen for M(t) er deterministisk.

[24] I Appendix C er der vist en metode hvorpå det analytiske udtryk i CIR-modellen kan findes.

[25] Se Karatzas og Shreve (1988) afsnit 5.

$$dP_M(t,T) = \frac{dP(t,T)}{dM(t)} = [\mu_P - r]P_M(t,T)dt + \sigma_p P_M(t,T)dW$$

Dette resulterer i, at den normerede prisproces $P_M(t,T)$ kan skrives på følgende form: Argumentet for at inddrage den normerede prisproces $P_M(t,T)$ med M(t) som deflator er tofoldig.

For det første gælder det, at der ingen arbitragemuligheder er givet processen P(t,T), hvis og kun hvis, der ikke er nogen arbitragemuligheder givet den normerede prisproces $P_M(t,T)$. Dette argument stammer fra "the numeraire invariance theroem" og positiviteten af deflatoren M(t). Dette fordi "the numeraire invariance theroem" siger, at hvis M(t) er en regulær deflator, så er en handelsstrategi selvfinansierende[26] med hensyn til P(t,T), hvis og kun hvis den er selvfinansierende med hensyn til den normerede prisproces $P_M(t,T)$[27].

Endvidere gælder det, at hvis den normerede prisproces $P_M(t,T)$ tillader tilstedeværelsen af et ækvivalent martingale mål, er der ingen arbitragemuligheder. Hvor der også kan argumenteres for, at hvis $P_M(t,T)$ er en martingale, gælder det, at M(t) er en deflator ("state-price-deflator").

Dette betyder altså, at hvis det kan vises, at den normerede prisproces $P_M(t,T)$ tillader eksistensen af et ækvivalent martingale mål, er dette både en tilstrækkelig og nødvendig betingelse for, at der er arbitrage-frihed[28].

På grund af diffusion invariance princippet[29] er det således, at hvis $P_M(t,T)$ er en Ito-proces med $\frac{dP_M(t,T)}{P_M(t,T)} = \mu_P^M dt + \sigma_P^M dW$ og $P_M(t,T)$ endvidere er en martingale med hensyn til et ækvivalent sandsynlighedsmål Q, så eksisterer der en Wiener proces W under Q, for hvilken det gælder at $\frac{dP_M(t,T)}{P_M(t,T)} = \sigma_P^M dW$.

Hvor det hermed kan indses, eftersom P(t,T) = M(t)P_M(t,T), at processen for P(t,T) kan

$$dP(t,T) = r(t)P(t,T)dt + \sigma_p P(t,T)dW(t)$$

skrives således under det ækvivalente martingale mål:

[26] For en nærmere gennemgang af den selvfinansierende handelsstrategi henvises til Dothan (1990) side 297, sektion 12.4 og Duffie (1992) kapitel 6.

[27] Se Duffie (1992) side 96-97.

[28] Se Harrison og Kreps (1979) og Duffie (1992) kapitel 6.

[29] Se Duffie (1992) Appendix D.

Formel 22 ses at være et vigtigt afledt resultat i forbindelse med arbitragefri prisfastsættelse, givet et eksplicit udtryk for obligationspriser under et sandsynlighedsmål Q, med den egenskab, at den normerede prisproces P(t,T)/M(t) er en Q-martingale.

Definition nr. 1:

Et ækvivalent martingale mål er et sandsynlighedsmål Q på (Ω,F), som tilfredsstiller:

a) **Hvis sandsynlighedsmålet Q på (Ω,F) skal være ækvivalent til det oprindelige sandsynlighedsmål P, skal det gælde at Q(A) = 0 og P(A) = 0 for enhver hændelse AεF,.**

b) **$E(\rho^2) < \infty$, hvor $\rho = \exp\left[\int_0^t \lambda dW - \frac{1}{2}\int_0^t \lambda^2 ds\right]$, og $\rho = dQ/dP$, som er den Radon-Nikodym afledte.**

c) $E[e^{\frac{1}{2}\int_0^t \lambda^2 ds}] < \infty$, **dvs at λ skal være begrænset på en eller anden måde, hvor denne betingelse kaldes for Novikovs betingelse, se Duffie (1992) Appendix D.**

d) **P(t,T)/M(t) er en martingale, hvor kravet her er, at $\int_0^t \sigma_p(s,T)ds < \infty$, dvs begrænset, se Harrison og Kreps (1979) side 396.**

$$W_i(t) = W(t) - \int_0^t \lambda ds \qquad for\ 0 \le t \le T$$

Det redskab, der her skal anvendes, er Girsanovs teori. Lad nu:
Girsanovs teori siger, at W er en Wiener proces på (Ω,F,Q), hvor dQ = ρdP, og at $P_M(t,T)$

$$dP_M(t,T) = [\mu_P - r]P_M(t,T)dt + \sigma_p P_M(t,T)[dW - \lambda dt]$$

tilfredsstiller følgende stokastiske proces:

Da $\lambda = \frac{\mu_P - r}{\sigma_P}$ kan formel 24 omskrives til:

$$dP_M(t,T) = [\mu_P - r]P_M(t,T)dt + \sigma_p P_M(t,T)[dW - \frac{[\mu_P - r]}{\sigma_P}dt]$$
$$= \sigma_P P_M(t,T)dW$$

Hvor det ses, at $P_M(t,T)$ er en martingale.

Dette indikerer også, at processen for P(t,T) fra formel 22 er defineret under det ækvivalente sandsynlighedsmål Q.

$$P(T_1,T) = P(t,T)\exp\left[\int_t^{T_1} r(s)\,ds - \frac{1}{2}\int_t^{T_1}\sigma_P^2 ds + \int_{tto} T_1\sigma_P dW(s)\right] \qquad t < T_1 < T$$

En direkte konsekvens af formel 22 er, at de enkelte obligationspriser er givet ved:
Det kan altså konkluderes, at formel 26 er løsningen til formel 22. Yderligere ses det, at den

$$\frac{P(T_1,T)}{P(t,T_1)} = P(t,T)\exp\left[-\frac{1}{2}\int_t^{T_1}\sigma_P^2 ds + \int_t toT_1\sigma_P dW(s)\right] \qquad t < T_1 < T$$

normerede prisproces $P_M(t,T)$ er defineret som:

$$\frac{P(t,T)}{P(t,t)} = E_t^Q\left[\frac{P(T_1,T)}{P(t,T_1)}\right] \qquad t < T_1 < T$$

I henhold til martingale egenskaben haves:
Under forudsætningen at $T_1 = t$, og ved at anvende horisontbetingelsen betyder det, at formel

$$P(t,T) = E_t^Q\left[e^{-\int_t^T r(s)\,ds}\right]$$

28 kan omskrives til:
Hvor dette udtryk repræsenterer obligationsprisen under det ækvivalente sandsynlighedsmål.

Antagelse nr. 1

Feynman-Kac løsningen til et Cauchy problem a la formel 19 under hensyntagen til en generel randbetingelse g(r,T) kan skrives på følgende form[30]:

[30] Se Karatzas og Shreve (1988) sektion 4.4 og Duffie (1992) Appendix E. I forbindelse med Feynman-Kac løsningen er det dog således, at Feynman-Kac løsningen originalt refererer til en mindre klasse af parabolske differentialligninger end Cauchy problemet, således at formel 30 principielt refererer til den sandsynlighedsbetingede

$$P(t,T) = E_t^Q\left[e^{-\int_t^T r(s)\,ds} g(r,T) \right]$$

Hvor E_t^Q er forventningsoperatoren på tidspunkt t under sandsynlighedsmålet Q, dvs forventningsoperatoren er taget under den risikoneutale spotrenteproces, eller sagt på en anden måde: Feynman-Kac løsningen er sammenfaldende med en karakterisering af obligationspriserne under det ækvivalente sandsynlighedsmål.

Bevis:

Spotrenteprocessen under det originale sandsynlighedsmål P i Vasiceks model er defineret

$$dr = \kappa[\theta - r]dt + \sigma dW$$

som:
Ved at anvende Girsanovs transformationssætning kan det vises, at spotrenteprocessen under

$$dr = [\kappa[\theta - r] - \lambda\sigma]dt + \sigma dW$$

det ækvivalente sandsynlighedsmål Q kan skrives på følgende form:
Ved at anvende Itos lemma på dette udtryk kan det nemt vises, at den resulterende partielle differentialligning bliver af formen givet i formel 19.

For randbetingelsen g(r,T) = 1 medfører det, at formel 30 degenererer til formel 29, således at Feynman-Kac løsningen er identisk til løsningen ved anvendelse af martingale approachet, hvilket fuldfører argumentationen.

Qed.

Det analytiske udtryk for Vasicek modellen kan nu findes med udgangspunkt i formel 29 og ved at anvende definitionen af den Radon-Nikodym afledte til at switche tilbage til det oprindelige sandsynlighedsmål under hensyntagen til arbitrær fastlæggelse af markedsrisiko

$$P(t,T) = E_t^Q\left[e^{-\int_t^T r(s)\,ds} \right] = E_t\left[e^{-\int_t^T r(s)\,ds + \int_t^T \lambda dW - \frac{1}{2}\int_t^T \lambda^2 ds} \right]$$

parameteren:
Da det vides, at spotrenten er normalfordelt, vides det også, at eksponenten i den sidste kantede parantes er normalfordelt, således at løsningen til formel 33 alternativt kan skrives på

løsning til den partielle differentialligning.

$$P(t,T) = e^{-E[X(t,T)] + \frac{1}{2}V[X(t,T)]}$$

for

$$X(t,T) = -\int_t^T r(s)\,ds + \int_t^T \lambda dW - \frac{1}{2}\int_t^T \lambda^2 ds$$

følgende form:

Det vides, at den forventede værdi og varians[31] for $Y(t,T) = \int_t^T r(s)\,ds$ kan[32] skrives

$$E_t[Y(t,T)] = \int_t^T e^{-\kappa(v-t)}\left[r + \int_t^v e^{\kappa(s-t)}[\kappa\theta - \lambda\sigma]ds\right]dv$$

og

$$V_t[Y(t,T)] = \int_t^T e^{-2\kappa(v-t)}\left(\int_t^v e^{\kappa(s-t)}\sigma ds\right)^2 dv$$

som:

Ved at udføre integrationerne i formel 35 og derefter indsætte i formel 33 medfører det, at

$$P(t,T) = \exp\left[\frac{1}{\kappa}[1 - e^{-\kappa\tau}][R(\infty) - r] - \tau R(\infty) - \frac{1sigmasup2}{4\ \kappa^3}[1 - e^{-\kappa\tau}]^2\right]$$

for

$$R(\infty) = \theta - \frac{\lambda\sigma}{\kappa} - \frac{1\sigma^2}{2\kappa^2}$$

obligationsprisen i Vasicek modellen under sandsynlighedsmålet P bliver:

[31] Se Karatzas og Shreve (1988) afsnit 5.6.

[32] Hvor $\int_t^T r(s)\,ds$ repræsenterer en integration under det originale sandsynlighedsmål P, således at Y(t,T) = X(t,T). At indse at dette er korrekt overlades til læseren, da argumentet er ligetil.

Hvilket kan ses at være identisk med Vasiceks formel 27[33].

En slutbemærkning er, at både CIR-modellen og Vasicek modellen er det, der almindeligvis går under navnet affine rentestrukturmodeller i og med, at løsningen til de respektive partielle

$$P(t,T) = e^{A(\tau)r + B(\tau)}$$

differentialligninger opfylder følgende postulerede funktionelle form for obligationspriserne: Hvor $\tau = T - t$, dvs repræsenterer restløbetiden[34].

Det, at den funktionelle form kan skrives på følgende form, er ikke unikt for disse to modeller. Det gælder også for en lang række af de modeller, der vil blive betragtet i de efterfølgende afsnit[35].

Med formel 37 in mente er det endvidere muligt at specificere definitionen af en lineær rentestrukturmodel.

Definition nr. 2.

En rentestrukturmodel siges at være lineær, hvis den effektive nulkuponrente er lineær i ændringer i den/de underliggende tilstandsvariabel/le.

Hvor det altså kan sluttes, at både Vasicek og CIR-modellen er lineære rentestrukturmodeller.

[33] En alternativ udledning af det analytiske udtryk for Vasicek modellen er foretaget i Appendix D.

[34] Hvor dette præcis er indfaldsvinklen i Appendix C og D i forbindelse med udledningen af analytiske udtryk for henholdsvis CIR-modellen og Vasicek modellen.

[35] Faktisk gælder det så vidt vides for alle rentestrukturmodeller, hvor det er muligt at finde analytiske udtryk for obligationspriserne, pånær Constantinides modellen, se afsnit 7.

4. En-faktor contra fler-faktor modeller[36]

Et fundamentalt problem ved en-faktor rentestrukturmodeller er selvfølgelig, at alle obligationspriser er perfekt korreleret. Dette betyder ikke, at en given ændring i tilstandsvariablen nødvendigvis vil ændre alle obligationspriser lige meget, men derimod at de alle vil bevæge sig i den samme retning[37].

Implikationen hvad angår rentestrukturskift er, at enten vil hele rentestrukturen bevæge sig op eller bevæge sig ned. I en-faktor modeller eksisterer der nemlig ingen mulighed for såkaldte tvist i rentestrukturen.

Det betyder også, at porteføljer, der er hedget i dette framework, "kun" er hedget mod ændringer i tilstandsvariablen, og derved hele den herudfra afledte rentestruktur. Denne form for renterisikostyring afviger altså ikke fundamentalt fra det at anvende den såkaldte en-faktor varighedsmodel.

Forskellen består simpelthen i, at man i en-faktor varighedsmodeller tager rentestrukturen som givet og hedger derefter mod eksempelvis additive skift heri, hvorimod hedging i en-faktor stokastiske modeller er en hedge imod ændringer i tilstandsvariablen, hvor denne tilstandsvariabel fuldt ud fastlægger selve rentestrukturen. Begge metoder lider af samme fundamentale problem, da de kun betragter tilfælde, hvor rentebevægelserne har ens fortegn.

Dette er da også i modstrid med alle de empiriske analyser, der er foretaget på hvorledes rentestrukturen faktisk bevæger sig. Det har vist sig på både det amerikanske og det danske marked, at der i hvert fald skal 3 faktorer til for at få beskrevet den fulde dynamik i rentestrukturen.

En anden konsekvens af at anvende en-faktor modeller er, at de indeholder den implikation, at konsol-renten er deterministisk, hvilket betyder at konsolrenten er uafhængig af tilstandsvariablen - den risikofri rente.

For at få rettet op på den uhensigtsmæssighed, at rentestrukturbevægelser i en-faktor modeller er begrænset til at være af samme fortegn, er der i litteraturen blevet foreslået en række modeller i det ligevægtsbaserede framework, der skal prøve at rette op på denne simplifikation af problemstillingen.

De i den forbindelse formentlig mest bemærkelsesværdige modeller er nok Brennan og Schwartz (1979), (1980), (1982), Vasicek og Fong (1991), Longstaff og Schwartz (1990),

[36] Når der fremover i dette arbejdspapir anvendes vendingen en-faktor lineære rentestrukturmodeller, tænkes der på en-faktor lineære rentestrukturmodeller, der tilhører den affine klasse.

[37] Dette gælder dog kun for de lineære rentestrukturmodeller, ikke for de ikke-lineære rentestrukturmodeller, se afsnit 7.

(1992) og Walter (1995).

Alle disse fire modeller er to-faktor modeller. I Brennan og Schwartz modellen er konsolrenten den anden tilstandsvariabel, hvorimod at i Vasicek og Fong og Longstaff og Schwartz modellerne er den anden tilstandsvariabel volatiliteten i den risikofri rente. Hvad angår Walters model er tilstandsvariablene her den lange rente og rentespreadet mellem den korte og lange rente.

En anden type af modeller er multifaktormodeller i det gaussiske framework. En generel formulering af en sådan modeltype er blevet foretaget i en mindre kendt artikel, nemlig Langetieg (1980). Dette framework er blevet interessant med introduktionen af Beaglehole og Tenneys (1991) multivariate rentestrukturmodel, som principielt er identisk med Langetiegs originale modelformulering. Hvor dette modelframework f.eks. indeholder Vasicek modellen og Kraus og Smith (1993) modellen som grænsetilfælde.

En anden multifaktormodel er Duffie og Kans (1993) model som er en generalisering af Brown og Schaefers (1991) affine rentestruktur model. Duffie og Kans model indeholder bl.a. Longstaff og Schwartz modellen, CIR-modellen, Vasicek modellen og Chen og Scott (1993) modellen[38] som grænsetilfælde. Den indeholder også Langetiegs model som grænsetilfælde, dog under den bibetingelse, at der er uafhængighed mellem de enkelte Wiener processer. Endvidere indeholder Duffie og Kans model en form for hybrid stokastisk volatilitet. Denne model vil dog ikke blive yderligere behandlet her, derimod henvises til Duffie og Kan (1993) for yderligere information.

En sidste klasse af modeller er de ikke lineære rentestrukturmodeller, som bl.a. er blevet behandlet i Beaglehole og Tenney (1991), Longstaff (1989), Jamshidian (1993) og Constantinides (1992). Longstaff modellen er indeholdt som et special tilfælde af de mere generelle formuleringer hos Beaglehole og Tenney og Jamshidian.

5. To-faktor modeller for rentestrukturen

Jeg vil her fokusere på følgende tre modeller: Brennan og Schwartz, Walter og Longstaff og Schwartz modellerne. De vil blive behandlet i nævnte rækkefølge.

5.1 Brennan og Schwartz

Brennan og Schwartz (1979), (1980) og (1982) opstiller et udtryk for prisen på en nulkuponobligation, som er en funktion af to tilstandsvariable, nemlig den risikofri rente r og renten på en konsolobligation l. Disse 2 renter antages at være givet ved følgende stokastiske

[38] Hvor det gælder, at Chen og Scott modellen principielt set er identisk med Longstaff og Schwartz modellen, i og med at begge modeller antager, at de to tilstandsvariable hver især er beskrevet ved en "square-root" proces.

$$dr = \mu_r dt + \sigma_r dW_r$$
og
$$dl = \mu_l dt + \sigma_l dW_l$$

processer:
Hvor t er tiden, dW_r og dW_l er Wiener processer, hvor det gælder, at $E[dW_r] = E[W_l] = 0$, $(dW_r)^2 = (dW_l)^2 = dt$, $dW_r dW_l = \rho dt$. μ_r og μ_l er henholdsvis den infinitesimale drift i den korte og lange rente, σ_r^2 og σ_l^2 er henholdsvis den infinitesimale varians i den korte og lange rente; og ρ er den infinitesimale korrelationskoefficient imellem de stokastiske ændringer i de to renter r,l[39].

Den stokastiske proces for prisen på en nulkuponobligation, som kun er en funktion af disse 2

$$\frac{dP}{P} = \mu_P dt + \sigma_1 dW_r + \sigma_2 dW_l$$

tilstandsvariable, kan skrives således:

$$\mu_P = \left[P_t + P_r\mu_r + P_l\mu_l + \frac{1}{2}P_{rr}\sigma_r^2 + \frac{1}{2}P_{ll}\sigma_l^2 + P_{rl}\sigma_l\sigma_r\rho \right]\frac{1}{P}$$
$$\sigma_1 = \frac{P_r\sigma_r}{P}$$
$$\sigma_2 = \frac{P_l\sigma_l}{P}$$

Ud fra Itos lemma vides, at μ_P, σ_1 og σ_2 kan udtrykkes således:
Den endelige partielle differentialligning for alle fordringer, der kun er en funktion af disse to tilstandsvariable og tiden, kan nu findes ved at anvende det risikofri arbitrageargument,

$$P_t + P_r[\mu_r - \lambda_r\sigma_r] + P_l[\mu_l - \lambda_l\sigma_l] + \frac{1}{2}P_{rr}\sigma_r^2 + \frac{1}{2}P_{ll}\sigma_l^2$$
$$+ P_{rl}\sigma_r\sigma_l\rho = rP$$

hvilket giver følgende resultat:

$$E(\underline{r}) = r + \frac{\lambda_r\sigma_r P_r}{P} + \frac{\lambda_l\sigma_l P_l}{P}$$

Dette har den implikation, at det forventede afkast på en nulkuponobligation kan skrives som:
Det kan ses, at den her opstillede endelige partielle differentialligning indeholder to

[39] Når jeg her anvender betegnelsen den korte rente og den lange rente, menes der henholdsvis den risikofri rente og renten på en konsolnulkuponobligation.

risikoparametre, som hver især kan forstås som markedsprisen på risiko for at bære præcis den form for stokastisk risiko, der kan henføres til henholdsvis den korte og den lange rente.

Denne partielle differentialligning kan dog simpliceres, som også vist af Brennan og Schwartz (1979) Appendix A ved at antage, at den ene af de to risikoparametre ikke er at betragte som en "ikke-observerbar" fordring, men derimod som en "observerbar" fordring.

Det er mest naturligt at vælge den lange rente, da den korte rente under alle omstændigheder skal bruges i anvendelsen af det risikofri arbitrageargument.

Elimineringen af λ_l for formel 41 foregår efter følgende princip.

$$P(\infty) = \frac{c}{l}$$

Prisen på en konsolnulkuponobligation kan skrives således:
Dvs P(∞) er defineret som prisen på en konsolobligation med en kontinuert tilskrevet kuponrente på c.

$$dP(\infty) = dP_l(\infty)dl + \frac{1}{2}dP_{ll}(\infty)dl^2 \Rightarrow$$

$$\frac{dP(\infty)}{P(\infty)} = \left[\frac{\sigma_l^2}{l^2} - \frac{\mu_l}{l} + l\right]dt - \frac{\sigma_l}{l}dW_l$$

Ved anvendelse af Itos lemma herpå fås følgende[40]:

$$\sigma_1(\infty) = 0$$

og

$$\sigma_2(\infty) = -\frac{\sigma_l}{l}$$

og

$$\mu_P(\infty) = \frac{\sigma_l^2}{l^2} - \frac{\mu_l}{l} + l$$

Ved at sammenligne formel 44 og 39 kan følgende udledes:
Hvis disse udtryk indsættes i formel 42, fås følgende udtryk for λ_l:

[40] Hvor leddet l i formlen fremkommer ved at introducere et kontinuert cashflow i den stokastiske proces.

$$\lambda_l = -\frac{\sigma_l}{l} + \frac{\mu_l + rl - l^2}{\sigma_l} \Rightarrow$$

$$\mu_l - \lambda_l\sigma_l = \frac{\sigma_l^2}{l} - rl + l^2$$

Ved derefter at indsætte i formel 41 resulterer dette i følgende endelige partielle

$$P_t + P_r[\mu_r - \lambda_r\sigma_r] + P_l\left[\frac{\sigma_l^2}{l} - rl + l^2\right] + \frac{1}{2}P_{rr}\sigma_r^2 + \frac{1}{2}P_{ll}\sigma_l^2$$
$$+ P_{rl}\sigma_r\sigma_l\rho = rP$$

differentialligning:
Hvor dette udtryk er identisk med Brennan og Schwartz (1979) formel 8.

Relationen i formel 47 kan også udledes på en alternativ måde, nemlig ved direkte at anvende prisudtrykket fra formel 43 på den partielle differentialligning.

$$P_l(\infty) = -\frac{c}{l^2}, \qquad P_{ll} = \frac{2c}{l^3}, \qquad P_r = P_{rr} = P_{lr} = P_t = 0$$

Ved at anvende denne relation direkte på de partielle afledte i formel 43 fås:

$$-\mu_l\frac{c}{l^2} + \Gamma_l\frac{c}{l^2} + \sigma_l^2\frac{c}{l^3} - r\frac{c}{l} + c = 0$$

for

$$\Gamma_l = \lambda_l\sigma_l$$

Som ved indsættelse i formel 43 giver[41]:

$$\mu_l - \lambda_l\sigma_l = \frac{\sigma_l^2}{l} + l^2 - rl$$

Dette kan vises at ville give følgende udtryk:
Hvorefter formel 47 følger direkte.

[41] Dette udtryk er ækvivalent med Astrup Jensen og Aase Nielsens formel 6.8.50.

I deres endelige model reformulerer Brennan og Schwartz formel 39 for at undgå, at der er en positiv sandsynlighed for negative renter. Måden de løser dette på, er ved at udtrykke deres spredningsparametre i overensstemmelse med Courtadon[42].

De udtrykker endvidere driften i den korte rente til at være givet ved en første ordens

$$\mu_r = \kappa[l - r]$$

autoregressiv proces således:
Denne specifikation indeholder den egenskab, at den lange rente er baseret på forventningerne om de fremtidige korte renter, hvor denne konvergering vil foregå med en hastighed proportional i forhold til κ, for $\kappa > 0$.

$$\mu_l = al^2 + bl + crl$$

Driften i den lange rente er i deres model defineret således:
Hvor dette udtryk er fundet ved at antage, at risikoparameteren for den lange rente (λ_l) er en lineær funktion i r og l. Ved derefter at løse formel 50 med hensyn til μ_l, fremkommer formel 52.

$$a = \sigma_l X_1 + 1$$
og
$$b = \sigma_l X_3 + \sigma_l^2$$
og
$$c = \sigma_l X_2 - 1$$
for
$$\lambda_l = X_1 l + X_2 r + X_3$$

I den forbindelse kan det konstateres, at koefficienterne a,b og c har følgende udseende:
Hvad angår denne reformulering af henholdsvis driften i den korte og den lange rente, er der et spørgsmål der trænger sig på. Givet den subjektive funktionelle form, som er antaget for risikoparameteren for den lange rente, er den resulterende proces at betragte som risikofri?

$$E(\mu_P) = r + \lambda_r \sigma_r r \frac{P_r}{P} + X_1 l^2 \sigma_l \frac{P_l}{P} + X_2 rl \sigma_l \frac{P_l}{P} + X_3 l \sigma_l \frac{P_l}{P}$$

Det forventede afkast kan for ovenstående proces skrives således:

[42] Dvs. ved at multiplicere spredningsparametrene med henholdsvis r og l.

som givet konstanterne X_1, X_2 og X_3 kan betragtes at være forenelig med det risikofri arbitrageargument[43].

Et fundamentalt problem med denne model er, at der ikke eksisterer en analytisk løsning, således at det i stedet er nødvendigt at anvende en numerisk løsningsmetode.

I en beslægtet artikel af Schaefer og Schwartz (1984) lykkes det dog for dem at finde en approksimativ analytisk løsning til en tilsvarende 2-faktor model. Hovedforskellen i deres model er for det første, at tilstandvariablene er defineret som henholdsvis konsolrenten og spreadet imellem spotrenten og konsolrenten. For det andet antager de, at konsolrenten følger en proces, som er identisk med Vasiceks model. For det tredie forudsættes det, at den proces der driver rentespreadet, er identisk med spotrenteprocessen fra Cox, Ingersoll og Ross` model[44]. En model, der er temmelig beslægtet med denne formulering, er Walters (1995) to-faktor model, som vil blive gennemgået nedenfor.

En formulering a la Schaefer og Schwartz og Walter af en to-faktor model har også den konsekvens, at kritikken i Hogan (1993) undgås[45], som påpeget af Rebonato og Cooper (1995).

5.2 Walter[46]

Walter antager, at processen for konsol renten er defineret ved en "square-root" martingale proces, og at rentespreadet kan beskrives ved en Ornstein-Uhlenbeck proces a la Vasicek,

$$ds = \kappa[\theta - s]dt + \sigma_s dW_s$$

$$og$$

$$dl = \sigma_l \sqrt{l} dW_l$$

således:
Hvor det er antaget, at de to Wiener processer er ukorrelerede.

Forklaringen på at antage, at de to stokastiske processer er ukorrelerede, stammer fra en

[43] Se Madsen (1994a), hvor kravene til risikopræmien er nærmere specificeret.

[44] For en nærmere uddybning af hvorledes selve approksimationen bliver foretaget henvises til Schaefer og Schwartz (1984).

[45] Hogan viser nemlig, at driften for konsolrenten under det ækvivalente martingale mål (den risikoneutrale drift) ikke er specificeret som i formel 50, da processen under den risikoneutrale proces eksploderer, hvilket ikke er tilfældet under det originale sandsynlighedsmål, således at modellen er fejlspecificeret.

[46] Denne model er opstillet i Walters afhandling fra 1995, men da den er på tysk har den principielt ikke været mig utilgængelig, således at det kun er selve de stokastiske processer for de to tilstandsvariable jeg kender fra Buhler, Uhrig, Walter og Weber (1995).

observation i Schaefer og Schwartz. Yderligere er det valgt at modellere konsol renten som en martingale, da analyser på det tyske marked viser, at driften er tæt på nul (0). Negative renter undgås ved at lade diffusionskoefficienten være defineret som i CIR-modellen. Slutteligt er det naturligt at lade spreadet være normalfordelt, da dette implikerer, at det både kan påtage positive og negative værdier.

Da det er antaget, at der ingen korrelation er mellem de to processer, er det faktisk muligt at opstille et analytisk udtryk for prisen på en nulkuponobligation. Dette vil blive vist nedenfor.

$$\frac{dP}{P} = \mu_P dt + \sigma_1 dW_s + \sigma_2 dW_l$$

Den stokastiske proces for obligationspriserne kan skrives på følgende form:

$$\mu_P = \left[P_t + P_s[\kappa[\theta - s] - \Gamma_s] - P_l l\Gamma_l + \frac{1}{2}P_{ss}\sigma_s^2 + \frac{1}{2}P_{ll}l\sigma_l^2 \right]\frac{1}{P}$$

$$\sigma_1 = \frac{P_s\sigma_s}{P}$$

$$\sigma_2 = \frac{P_l\sigma_l}{P}$$

Ved at anvende Itos lemma kan det vises, at μ_P, σ_1 og σ_2 bliver af følgende form:
Den partielle differentilligning, som alle fordringer der kun er en funktion af s,l og tiden skal

$$P_t + P_s\kappa_s\theta_s - P_s\kappa_s s - P_s\Gamma_s - P_l l\Gamma_l + \frac{1}{2}P_{ss}\sigma_s^2 + \frac{1}{2}P_{ll}l\sigma_l^2 = sP + lP$$

tilfredstille, kan ved anvendelse af det risikofri arbitrageargument vises at få følgende form:
Fodtegnene til P repræsenterer de partielle afledte. Endvidere ses det, at det antages, at markedsrisikoen for den lange rente er defineret som i CIR-modellen, dvs som produktet af tilstandsvariablen og markedsrisikoparameteren.

Da det vides, at s = r - l, således at s + l = r, kan det indses - under hensyntagen til, at de to processer er ukorrelerede - at prisen på en nulkuponobligation i denne model kan udtrykkes

$$P(t,T) = E_t\left[\exp\left(-\int_t^T s(s)\,ds\right)\right] + E_t\left[\exp\left(-\int_t^T l(s)\,ds\right)\right]$$

som:

Det vides, at løsningen til den første forventningsoperator er givet ved formel 36, således at det kun er den sidste forventningsoperator der skal løses. Vel vidende, at processen for konsolrenten er en simpel version af CIR-modellen, kan det med udgangspunkt i princippet

$$P(t,T) = e^{A(\tau)s + B(\tau)l + C(\tau)}$$

$$for$$

$$A(\tau) = \frac{e^{-\kappa_s \tau} - 1}{\kappa_s}$$

$$B(\tau) = -\frac{2[e^{\gamma\tau} - 1]}{2\gamma + [\gamma + \Gamma_l][e^{\gamma\tau} - 1]}$$

$$C = \frac{D}{\kappa_s} e^{-\kappa_s \tau} + \tau D - \frac{D}{\kappa_s} - \frac{1}{4}\frac{\sigma_s^2}{\kappa_s^2}[1 - e^{-\kappa_s \tau}]^2$$

$$og$$

$$D = \frac{1}{2}\frac{\sigma_s^2}{\kappa_s^2} - \frac{\theta_s \kappa_s - \Gamma_s}{\kappa_s}$$

$$\gamma = \sqrt{\Gamma_l^2 + 2\sigma_l^2}$$

fra Appendix C vises, at prisudtrykket kan skrives på følgende form[47]:
Dette princip i forbindelse med udledning af analytiske udtryk for prisen på en nulkuponobligation i mere end en dimension gælder generelt. Forstået på den måde, at hvis hver af de stokastiske processer, der beskriver dynamikken i rentestrukturen er "tractable", er det (givet der er uafhængighed mellem de stokastiske processer) altid muligt at finde et analytisk udtryk.

Dette betyder dog ikke, at det ikke er muligt at finde analytiske udtryk for obligationspriser i en m-faktor model under hensyntagen til, at der er afhængighed mellem de enkelte stokastiske processer. Et par eksempler herpå i en to-faktor model er givet i afsnit 5.3, og hvad angår en m-faktor model - hvor dette er muligt - henvises til afsnit 6.

5.3 Longstaff og Schwartz

Longstaff og Schwartz modellen er en "rigtig" ligevægtsmodel, som bygger på det samme framework som Cox, Ingersoll og Ross (1985). Det vil sige, at de indledningsvis starter med at definere dynamikken af økonomien, her dog givet ved to tilstandsvariable. Den ene tilstandsvariabel X har indflydelse på den del af afkastet, som er uafhængig af produktionsusikkerhed, og den anden tilstandsvariabel Y relaterer sig til både det forventede og usikre afkast ved en given produktion.
Disse to økonomiske tilstandsvariable antages at følge følgende stokastiske processer:

[47] Se Appendix E.

$$dX = (a - bX)dt + c\sqrt{X}dW_1$$
$$og$$
$$dY = (d - eY)dt + f\sqrt{Y}dW_2$$

hvor a,b,c,d,e,f > 0, og W_1 og W_2 er to Wiener processer, hvorom det gælder at $dW_1dW_2=0$, dvs ingen korrelation imellem de to stokastiske processer.

Med udgangspunkt i disse processer er det selvfølgelig muligt at udlede den partielle differentialligning som alle fordringer, der kun er en funktion af de to ikke observerbare X og Y, skal tilfredsstille.

I den forbindelse anvender Longstaff og Schwartz et resultat fra CIR (1985) side 377, theorem

$$\frac{1}{2}c^2XH_{XX} + \frac{1}{2}f^2YH_{YY} + [a - bX]H_X + H_t$$
$$[d - eY - \lambda Y]H_Y - rH = 0$$

3, som resulterer i følgende partielle differentialligning:
Hvor H repræsenterer værdien af en fordring, der kun er en funktion af tiden og de to tilstandsvariable X og Y. λ repræsenterer markedsrisikoparameteren for ændringer i tilstands-variablen Y. Baggrunden for, at der intet markedsrisikoparameter er tilknyttet tilstandsvariablen X, kan forklares ved, at ændringer i tilstandsvariablen X ingen relation har med produktionsusikkerhed. Dette har den implikation, at i ligevægt vil markedsrisikoen for X ikke blive prisfastsat i og med, at ændringer i denne tilstandsvariablen er ukorreleret med ændringer i den fysiske investering, se også note 49.

Validiteten af denne partielle differentialligning kan også vises ved et simpelt arbitrage-argument, og ved efterfølgende at indsætte den relevante funktionelle form for markedsrisikoparameteren. Lad mig for god ordens skyld gennemføre argumentationen.

Den stokastiske proces, der driver prisen H på en fordring, der kun er en funktion af tiden og

$$\frac{dH}{H} = \mu_H dt + \sigma_H dW$$
$$hvor$$
$$\mu_H = \frac{1}{H}\left[H_t + \frac{1}{2}c^2XH_{XX} + \frac{1}{2}f^2YH_{YY} + [a - bX]H_X + [d - eY]H_Y\right]$$
$$\sigma_H = \frac{H_Y}{H}\sigma\sqrt{Y}$$

de to tilstandsvariable X og Y, kan skrives således:

To forhold skal pointeres i forbindelse med denne relation. For det første er korrelationskoefficienten nul, da der er antaget uafhængighed mellem de to Wiener processer

W_1 og W_2. For det andet fremgår det tydeligt, at begge tilstandsvariable har indflydelse på det forventede afkast, og kun en af dem (Y) har indvirkning på den usikre del af afkastet.

Ved at anvende det risikofri arbitrageargument og efterfølgende at indsætte den funktionelle form for markedsrisikoparameteren, som bekendt er identisk med den fra CIR-modellen, ses det tydeligt, at dette vil resultere i en partiel differentialligning af formen givet ved formel 63.

I og med at Longstaff og Schwartz selvfølgelig er interesseret i at udtrykke deres endelige partielle differentialligning med udgangspunkt i to observerbare[48] tilstandsvariable, nemlig den risikofri rente og volatiliteten heri, kræver det, at det er muligt at udtrykke dynamikken i disse to ønskede tilstandsvariable som en funktion af dynamikken i de to oprindelige tilstandsvariable X og Y.

Ved at anvende et resultat fra CIR (1985) Theorem 1 side 373, er de i stand til at finde

$$r = \alpha X + \beta Y$$

følgende udtryk for den risikofri rente:
hvor vægtningsparameterne relaterer sig til den stokastiske proces, der driver det procentuelle afkast på en fysisk investering[49].

$$Vdt = (dr)^2 = \alpha^2(dX)^2 + \beta^2(dY)^2$$
$$\Rightarrow V = c^2\alpha^2 X + f^2\beta^2 Y$$

Den proces, der driver volatiliteten i den risikofri rente r, kan findes således:
Med udgangspunkt i formel 64 og 65 kan dynamikken, der driver henholdsvis den risikofri

[48] Ordvalget "observerbar" skal ikke her sammenblandes med det jeg tidligere i dette notat definerede som forskellen imellem en "observerbar" og en "ikke observerbar" fordring, som her betød handlebar. Her skal det forstås, om tilstandsvariablen helt basal, kan observeres i økonomien.

[49] I Longstaff og Schwartz' originale artikel har henholdsvis alpha og beta følgende udseende:

$\alpha = \mu$

og

$\beta = \theta - \sigma^2$

som stammer fra deres definition af processen, der driver det procentuelle afkast på en fysisk investering, som har følgende udseende:

$$\frac{\delta Q}{Q} = [\mu X + \theta Y]dt + \sigma\sqrt{Y}dW$$

hvor my, theta og sigma er positive konstanter og X og Y er de oprindelige tilstandsvariable. Relationerne for alpha og beta fremkommer eftersom der af tekniske årsager er antaget en logaritmisk præferencestruktur, som betyder at logaritmen skal anvendes på ovenstående formel.

Hvis disse definitioner for henholdsvis alpha og beta indsættes i de fremtidige formler, vil de resultater som er beskrevet i Longstaff og Schwartz fremkomme.

$$dr = \alpha dX + \beta dY$$
$$og$$
$$dV = c^2\alpha^2 dX + f^2\beta^2 dY$$

rente og volatiliteten heri, skrives således:

$$dr = (\alpha a + \beta d - \alpha bX - \beta eY)dt + \alpha c\sqrt{X}dW_1 + \beta f\sqrt{Y}dW_2$$
$$og$$
$$dV = (\alpha^2c^2a + \beta^2f^2d - \alpha^2c^2bX - \beta^2f^2eY)dt + \alpha^2c^3\sqrt{X}dW_1 + \beta^2f^3\sqrt{Y}dW_2$$

Ved anvendelse af Itos lemma finder man følgende stokastiske processer for r og V:
De oprindelige tilstandsvariable X og Y indgår heri. Måden, hvorpå disse principielt fjernes ved, er at indse, at formel 64 og 65 er to simple lineære ligninger i X og Y. Det her fremkomne ligningssystem er invertibelt, hvis $\beta f^2 \neq \alpha c^2$, og dette resulterer i følgende udtryk for X

$$X = \frac{r\beta f^2 - V}{\alpha(\beta f^2 - \alpha c^2)}$$
$$og$$
$$Y = \frac{V - \alpha c^2 r}{\beta(\beta f^2 - \alpha c^2)}$$

og Y:
Det er nu lykkedes at få udtrykt de to oprindelige tilstandsvariable X og Y som en funktion af de to nye tilstandsvariable r og V.

Ved indsættelse af relationen fra formel 68 i 67 fremkommer følgende udtryk for dynamikken

$$dr = \left(\alpha a + \beta d - \frac{b(r\beta f^2 - V)}{\beta f^2 - \alpha c^2} - \frac{e(V - \alpha c^2 r)}{\beta f^2 - \alpha c^2}\right)dt + \alpha c\sqrt{\frac{r\beta f^2 - V}{\alpha(\beta f^2 - \alpha c^2)}}dW_1 + \beta f\sqrt{\frac{V - \alpha c^2 r}{\beta(\beta f^2 - \alpha c^2)}}dW_2$$
$$og$$
$$dV = \left(\alpha^2c^2a + \beta^2f^2d - \frac{\alpha c^2 b(r\beta f^2 - V)}{\beta f^2 - \alpha c^2} - \frac{\beta f^2 e(V - \alpha c^2 r)}{\beta f^2 - \alpha c^2}\right)dt + \alpha^2c^3\sqrt{\frac{r\beta f^2 - V}{\alpha(\beta f^2 - \alpha c^2)}}dW_1 + \beta^2f^3\sqrt{\frac{V - \alpha c^2 r}{\beta(\beta f^2 - \alpha c^2)}}dW_2$$

i henholdsvis r og V:
Disse to processer er nu opstillet således, at de umiddelbart er uafhængige af dynamikken i de oprindelige tilstandsvariable. Dette er dog ikke helt tilfældet. For selvom X og Y ikke direkte indgår i dynamikken for r og V, så indgår de parametre, der bestemmer dynamikken i X og Y heri.

$$dr = (\kappa - \omega r - \gamma V)dt + \sqrt{\eta r + \xi V}dW_1 + \sqrt{(1 - \xi)V - \eta r}dW_2$$

og

$$dV = \left(\delta - \frac{r\gamma\eta^2}{\xi - \xi^2} - V\left(\omega + \frac{\gamma\eta(2\xi - 1)}{\xi - \xi^2}\right)\right)dt$$

$$+ \frac{\eta}{1 - \xi}\sqrt{\eta r + \xi V}dW_1 - \frac{\eta}{\xi}\sqrt{(1 - \xi)V - \eta r}dW_2$$

Derfor foretager Longstaff og Schwartz endnu en variabel ændring, således:

$$\kappa = \alpha a + \beta d$$

$$\omega = \frac{\beta f^2 b - \alpha c^2 e}{\beta f^2 - \alpha c^2}$$

$$\gamma = \frac{e - b}{\beta f^2 - \alpha c^2}$$

$$\delta = \alpha^2 c^2 a + \beta^2 f^2 d$$

$$\eta = \frac{\alpha\beta c^2 f^2}{\beta f^2 - \alpha c^2}$$

$$\xi = -\frac{\alpha c^2}{\beta f^2 - \alpha c^2}$$

hvor disse seks nye parametre $\kappa,\omega,\gamma,\delta,\eta$ og ξ er defineret således:
Den betingelse, at de originale parametre fra processerne, der drev henholdsvis X og Y skulle, være positive, har følgende implikationer for disse seks nye parametre. Det kræver nemlig, at $\kappa,\delta > 0$, $\eta/\xi < 0$ og $\eta/(1-\xi) > 0$. Endvidere er det nødvendigt, at V ligger imellem $-\eta r/\xi$ og $\eta r/(1-\xi)$ for at sikre, at leddene under kvadratsrodstegnene i formel 70 forbliver positive.

Ved at betragte processen for henholdsvis den risikofri rente og volatiliteten i den risikofri rente fremgår det, at der er et interaktivt forhold imellem de to processer, hvilket også er en intuitiv rimelig antagelse. Denne form for korrelation er dog væsentlig forskellig for den måde, hvorpå Brennan og Schwartz inddrager korrelation mellem processerne for de to tilstandsvariable. I Longstaff og Schwartz modellen er den stokastiske proces for de to tilstandsvariable nemlig for det første en direkte funktion af de to Wiener processer, og for det andet en direkte funktion af de to tilstandsvariables initialværdi.

En anden to-faktor model, som adskiller sig forholdsvis meget fra Longstaff og Schwartz` model, er Vasicek og Fongs model.

I modsætning til Longstaff og Schwartz er deres model ikke formuleret i en generel intertemporal ligevægtsmodel. De starter derimod med at postulere følgende stokastiske processer for henholdsvis den risikofri rente og volatiliteten heri:

$$dr = \kappa[\theta - r]dt + \sqrt{V}dW_1$$
$$og$$
$$dV = \gamma[\omega - V] + \xi\sqrt{V}dW_2$$

De to Wiener processer dW_1 og dW_2 antages at have en korrelation på ρ. Begge processerne indeholder mean-reversion, hvor hastigheden er proportional med forskellen mellem variablenes øjeblikkelige værdi og deres langsigtede værdi. Størrelsen af den usikre komponent for processen for den risikofri rente er bestemt af volatiliteten i denne rente, hvorimod volatiliteten i den korte rente er proportional i forhold til volatilitetens niveau.

Ud fra formel 72 fremgår det tydeligt, at hvis variansen er konstant, degenererer denne to-faktor model til Vasiceks en-faktor model. Dette indikerer altså, at denne model lider af det samme problem, hvad angår sandsynligheden for negative renter som i den oprindelige Vasicek model. Det skal dog her nævnes, at sandsynligheden for at observere negative renter her er større end i Vasiceks en-faktor model, eftersom volatiliteten nu antages at følge en stokastisk proces.

Den proces, der driver den procentuelle prisændring, er identisk med den fra Brennan og

$$\frac{dP}{P} = \mu_P dt + \sigma_1 dW_1 + \sigma_2 dW_2$$
$$\mu_P = \left[P_t + P_r\mu_r + P_V\mu_V + \frac{1}{2}P_{rr}\sigma_r^2 + \frac{1}{2}P_{VV}\sigma_V^2 + P_{rV}\sigma_V\sigma_r\rho\right]\frac{1}{P}$$
$$\sigma_1 = \frac{P_r\sigma_r}{P}$$
$$\sigma_2 = \frac{P_V\sigma_V}{P}$$
$$for$$
$$\mu_r = \kappa[\theta - r]$$
$$\sigma_r = \sqrt{V}$$
$$\mu_V = \gamma[\omega - V]$$
$$\sigma_V = \xi\sqrt{V}$$

Schwartz modellen, og resulterer i følgende udtryk:
Ved anvendelse af det risikofri arbitrageargument kan den partielle differentialligning som alle fordringer, der kun er en funktion af tiden, den risikofri rente og volatiliteten, skrives således:

$$P_t + P_r[\kappa[\theta - r]] + P_V[\gamma[\omega - V]] + \frac{1}{2}P_{rr}V + \frac{1}{2}P_{VV}\xi^2 V + P_{rV}\xi V\rho$$
$$- P_r\Gamma_r\sqrt{V} - P_V\Gamma_V\xi\sqrt{V} - rP = 0$$

Vasicek og Fong antager, at de to markedsrisiko parametre Γ_r og Γ_V er proportionale i forhold

$$\Gamma_r = \lambda_r\sqrt{V}$$
$$\Gamma_V = \lambda_V\sqrt{V}$$

til niveauet for volatiliteten, således:
hvor λ_r og λ_V er to konstanter.

Ved indsættelse af disse specifikationer i formel 74 fremkommer et udtryk, som er identisk

$$P_t + P_r[\kappa[\theta - r]] + P_V[\gamma[\omega - V]] + \frac{1}{2}P_{rr}V + \frac{1}{2}P_{VV}\xi^2 V + P_{rV}\xi V\rho$$
$$- P_r\lambda_r V - P_V\lambda_V\xi V - rP = 0$$

med Vasicek og Fongs´ formel midt på side 9:
Hvor det er indlysende, at de postulerede funktionelle former for de to markedsrisikoparametre ikke kolliderer med det risikofri arbitrageargument, se Madsen (1994a).

For både Longstaff og Schwartz og Vasicek og Fong modellen er det muligt at finde analytiske udtryk for prisen på en nulkuponobligation.

De postulerede funktionelle former for obligationspriserne er endvidere identiske og tilhører

$$P(t, T) = e^{A(\tau) + B(\tau)r + C(\tau)V}$$

den lineære affine klasse, nemlig:
hvor τ er restløbetiden, dvs T-t.

Hvad angår Vasicek og Fongs model, er $A(\tau)$ her identisk med $A(\tau)$ for den oprindelige Vasicek model. Derimod resulterer $B(\tau)$ og $C(\tau)$ i to komplicerede udtryk, som indeholder den konfluente hypergeometriske funktion[50]. En yderligere komplicering af Vasicek og Fongs udtryk for $B(\tau)$ og $C(\tau)$ er, at løsningen kræver anvendelse af kompleks algebra.

[50] Den konfluente hypergeometriske funktion har følgende udseende:

$$M(a, b, z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1).....(a+n)z^n}{b(b+1).....(b+n)n!}$$

se endvidere Abramowitz og Stegun (1970), kapitel 13.

I modsætning hertil er det analytiske udtryk for Longstaff og Schwartz modellen af relativ

$$A(\tau) = Y\tau + \ln[D^{v}(\tau)E^{\Xi}(\tau)]$$

$$D(\tau) = \frac{2\varphi}{\left(\omega + \frac{\eta\gamma}{1-\xi} + \varphi\right)(e^{\varphi\tau} - 1) + 2\varphi}$$

$$E(\tau) = \frac{2\psi}{\left(\omega - \frac{\eta\gamma}{\xi} + \lambda + \psi\right)(e^{\psi\tau} - 1) + 2\psi}$$

$$B(\tau) = D(\tau)\frac{1-\xi}{\varphi}(1 - e^{\varphi\tau}) + E(\tau)\frac{\xi}{\psi}(1 - e^{\psi\tau})$$

$$C(\tau) = D(\tau)\frac{\xi - \xi^2}{\eta\varphi}(1 - e^{\varphi\tau}) - E(\tau)\frac{\xi - \xi^2}{\eta\psi}(1 - e^{\psi\tau})$$

for

$$\varphi = \left[\left[\omega + \frac{\eta\gamma}{1-\xi}\right]^2 + \frac{2\eta}{1-\xi}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\psi = \left[\left[\omega - \frac{\eta\gamma}{\xi} + \lambda\right]^2 - \frac{2\eta}{\xi}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$v = \frac{2(1-\xi)^2(\kappa\eta + \delta\xi)}{\eta^2}$$

$$\Xi = \frac{2\xi^2(\delta(1-\xi) - \kappa\eta)}{\eta^2}$$

$$Y = \frac{1}{2}\left[v\left(\omega + \frac{\eta\gamma}{1-\xi} + \varphi\right) + \Xi\left(\omega - \frac{\eta\gamma}{\xi} + \lambda + \psi\right)\right]$$

simpel karakter. Det viser sig nemlig, at A(τ), B(τ) og C(τ) kan udtrykkes som:
Heraf fremgår det, at obligationspriser er en funktion af r,V og restløbetiden τ, og afhænger endvidere af parametrene κ,ω,γ,δ,η og ξ, samt af markedsrisikoparameteren λ. Med kendskab til disse størrelser er det ved anvendelse af formel 78 simpelt at udregne obligationspriser.

Longstaff og Schwartz modellen har endvidere følgende implikationer hvad angår den

$$\lim_{\tau\to 0} R(t,T) \to r$$

$$\lim_{\tau\to\infty} R(t,T) \to \frac{1}{2}\left[v\left(\varphi - \omega - \frac{\eta\gamma}{1-\xi}\right) + \Xi\left(\psi - \omega + \frac{\eta\gamma}{\xi} - \lambda\right)\right]$$

effektive rente på en τ-periode nulkuponobligation for henholdsvis $\tau \to 0$ og $\tau \to \infty$, nemlig:
Som for CIR modellen gælder det også for denne model, at consolrenten er uafhængig af den øjeblikkelige værdi af tilstandsvariablene.

Rentestrukturen kan ved anvendelse af formel 8 skrives således:

$$R(t,T) = -\frac{Y\tau + v\ln D(\tau) + \Xi\ln E(\tau) + B(\tau)r + C(\tau)V}{\tau}$$

I modsætning til både Vasicek og Cox, Ingersoll og Ross modellerne tillader denne model en temmelig nuanceret form for rentestruktur udseender. Som påpeget af Longstaff og Schwartz er der mulighed for, at rentestrukturen kan være monotonisk stigende eller faldende, samt have et eller flere "sving"[51].

6. Multi-faktor normalfordelte rentestrukturmodeller

Det antages, at den risikofri rente kan skrives som en lineær kombination af n-stokastiske

$$r(t) = \underline{\omega}^T \underline{X}(t)$$

processer, således:
hvor ω er en vektor af vægte, som her antages at være tidsuafhængige, hvor det endvidere er således, at elementerne i ω enten antager værdien 0 eller 1.Yderligere er X(t) en vektor af stokastiske faktorer.

Denne vektor X(t) antages at kunne udtrykkes ved følgende stokastiske multidimensionale

$$d\underline{X}(t) = (\underline{a} + \underline{BX}(t))dt + \underline{\underline{S}dW}$$

Ornstein-Uhlenbeck proces:
Her er **S** en nxn matrice af diffusionskoefficienter, dW er en vektor på n elementer, **B** er en nxn matrice og a er en n-vektor.

Det antages yderligere, at a, **B** og **S** er tids-homogene. Yderligere gælder, at hvis der er uafhængighed imellem de enkelte stokastiske processer, kan $\mathbf{SS^T}$ skrives som diag(σ), for σ værende en n-vektor af diffusionskoefficienter.

$$\underline{X}(T) = e^{-\underline{\underline{B}}(T-t)}\underline{X}(t) + \int_t^T e^{-\underline{\underline{B}}(T-s)}\underline{a}ds + \int_t^T e^{-\underline{\underline{B}}(T-s)}\underline{\underline{S}dW}(s)$$

Under disse antagelser angiver Langetieg side 78 løsningen til at være[52]:

[51] I forbindelse med Longstaff og Schwartz´ model udleder de analytiske udtryk for optioner på nulkuponobligationer. Dog er dette udtryk forholdsvis kompleks i og med at det kræver en dobbelt integration over produktet af to "univariate noncentral chi-squared" tæthedsfunktioner. Chen og Scott (1993) analyserer bl.a. prisfastsættelse af optioner på nulkuponobligationer i det samme specialtilfælde af en to-faktor Cox, Ingersoll og Ross model som Longstaff og Schwartz, og viser, at det er muligt at reducere dette dobbelte integral til en "univariate numerical" integration, som er væsentlig nemmere at have med at gøre.

[52] Se endvidere Arnold (1974) og Karatzas og Shreve (1988).

Som det tydeligt fremgår, er kravet til, at en analytisk løsning kan findes, at det er muligt at finde et udtryk for integralet til matricen $e^{-\underline{\underline{B}}(T-t)}$.

Forklaringen på, at denne fundamentale løsnings matrice optræder på denne form, er antagelsen om, at B er konstant - tidsuafhængig. Den generelle fundamentale nxn løs-

$$\underline{\varphi}(T-t) = \underline{\underline{B}}\underline{\varphi}(T-t) \qquad for \quad \underline{\varphi}(t-t) = \underline{\underline{I}}$$

ningsmatrice defineret ved Φ er nemlig:

$$\underline{\varphi}(T-t) = e^{-\underline{\underline{B}}(T-t)} = \underline{\underline{I}} + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{\underline{B}}^{-n} \frac{(T-t)^n}{n!}$$

som under antagelse om tidsuafhængighed får følgende form[53]:
I det generelle tilfælde, dvs B er ikke en diagonal-matrice, er det nødvendigt at finde egenværdierne og egenvektorerne på B for at få matricen på en analytisk form[54]. I tilfældet hvor B er antaget at være konstant samt at have fuld rang, er det muligt at finde en analytisk

$$\int_t^T e^{-\underline{\underline{B}}(s-t)} ds = \underline{\underline{Q}}\underline{\underline{A}}^{-1}[\underline{\underline{I}} - e^{-\underline{\underline{A}}(T-t)}]\underline{\underline{Q}}^{-1}$$

løsning på integralet til $e^{-\underline{\underline{B}}(T-t)}$, som kan skrives således[55]:

[53] Se Karatzas og Shreve afsnit 5.6.

[54] For en symmetrisk matrice findes egenværdierne ved at løse følgende ligningssystem $Q^{-1}BQ=A$, hvor Q er en ortogonal matrice som i søjlerne indeholder egenvektorerne til matrice B, og A er en diagonalmatrice med matricen B`s egenværdier i diagonalrækken. Hvis det endvidere er således, at Q indeholder de normaliserede egenvektorer, findes egenværdierne således $Q^TBQ=A$, da det i dette tilfælde gælder at $Q^TQ=I$, som medfører at $Q^{-1}=Q^T$, dvs Q er ortonormal. Som Beaglehole og Tenney (1991) nævner, er det selvfølgelig mere generelt at antage, at B ikke nødvendigvis behøver at være symmetrisk, som kan betyde, at egenværdierne kan bestå af komplekse tal. Egenværdierne (og for den sags skyld egenvektorerne) kan i den forbindelse løses med en generel algoritme for egenværdiproblemet, nemlig QZ-algoritmen, se Moler og Stewart (1973) SIAM journal of Numerical Analysis. Denne algoritme vil endvidere også løse problemet, hvis determinanten til matricen B er nul.

[55] Forklaringen på, at denne relation er valid, ligger i regnereglerne for eksponentialet til en matrice. Hvis det er således, at B kan skrives på formen QAQ^{-1}, er det nemlig muligt at skrive e^{-B} på formen $Qe^{-A}Q^{-1}$.

Hvor Q er en matrice med B`s egenvektorer i søjlerne og A er en diagonal matrice med B`s egenværdier i diagonalen. Kravet til, at denne relation har en løsning, er, at den inverse til B eksisterer. Dette er kun tilfældet, hvis matricen har fuld rang, dvs dim søj B er lig antal søjler i B, som netop betyder, at der skal være lineær uafhængighed imellem de enkelte søjler[56].

Hvis man holder fast ved antagelsen for præferencestrukturen fra Vasicek, kan den

$$d\underline{X}(t) = (\underline{b} + \underline{BX}(t))dt + \underline{\underline{S}dW}(t)$$

$$for$$

$$\underline{b}^T = \underline{a}^T - \underline{S\lambda}^T$$

risikoneutrale proces for X(t) skrives således:
hvor λ er en vektor af markedsrisikoparametre.

$$\underline{X}(T) = e^{-\underline{\underline{B}}(T-t)}\underline{X}(t) + \int_t^T e^{-\underline{\underline{B}}(T-s)}\underline{b}ds + \int_t^T e^{-\underline{\underline{B}}(T-s)}\underline{\underline{S}dW}(s)$$

Dette medfører, at den risikojusterede pendant til formel 83 får følgende udseende:

$$E_t[\underline{X}(T)] = e^{-\underline{\underline{B}}(T-t)}\underline{X}(t) + \int_t^T e^{-underlineunderlineB(s-t)}\underline{b}ds$$

$$V_t[\underline{X}(T)] = \int_t^T e^{-\underline{\underline{B}}(s-t)}\underline{\underline{SS}}^T e^{-\underline{\underline{B}}^T(s-t)}ds$$

som har følgende første og andet moment (forventede værdi og varians):
I og med at spotrenteprocessen er defineret som i formel 81, kan den effektive nulkuponrente

$$Y(t,T) = \int_t^T r(s)ds$$

$$= \underline{\omega}^T\int_t^T\left[e^{-\underline{\underline{B}}(T-t)}\underline{X}(t) + \int_t^T e^{-\underline{\underline{B}}(T-s)}\underline{b}ds + \int_t^T e^{-\underline{\underline{B}}(T-s)}\underline{\underline{S}dW}(s)\right]$$

fra tidspunkt t - T, med kendskab til processen for X(t) skrives således:
Da det gælder, at spotrenten (den risikofri rente) er defineret som en lineær kombination af n-normalfordelte processer, er processen for r(t) (formel 90) også normalfordelt. I og med at det er de risikojusterede processer der betragtes, medfører dette, at ligevægtsobligationsprisen kan udtrykkes som:

[56] Hvis ikke determinanten til B er forskellig fra nul, har denne relation et andet udseende. Det ligger dog uden for rammerne i dette notat at komme nærmere ind på dette tilfælde.

$$P(t,T) = E_t\left[e^{-\int_t^T r(s)\,ds}\right] = E_t[e^{-Y(t,T)}] = e^{-E_t[Y(t,T)] + \frac{1}{2}V_t[Y(t,T)]}$$

Hvis jeg nu følger princippet fra Beaglehole og Tenney (1991), er det relevant at definere

$$dZ(t) = \begin{bmatrix} dY \\ (,t,) \\ dX \\ (,t,) \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 0 \\ \underline{b} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \underline{\omega}^T \\ 0 & \underline{\underline{B}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{Y} \\ (,t,) \\ \underline{X} \\ (,t,) \end{bmatrix}\right] + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{\underline{S}} \end{bmatrix}\underline{dW}$$

$$for$$

$$dZ(t) = (\underline{c} + \underline{C}\underline{Z}(t)) + \underline{T}\underline{dW}$$

følgende nye stokastiske proces:
hvor c er en n+1 vektor, C er en (n+1)x(n+1) og T er en (n+1)xn matrice af diffusionskoefficienter og Z(t) er en n+1 vektor af tilstandsvariable.

$$E_t[\underline{Z}(T)] = e^{-\underline{\underline{C}}(T-t)}\underline{Z}(t) + \int_t^T e^{-underlineunderlineC(s-t)}\underline{c}ds$$

$$V_t[\underline{Z}(T)] = \int_t^T e^{-\underline{\underline{C}}(s-t)}\underline{\underline{T}}\underline{\underline{T}}^T e^{-\underline{\underline{C}}^T(s-t)}ds$$

Den forventede værdi og varians for denne proces får følgende udseende:
Den betingede forventede værdi og varians for Y(t) findes som bekendt som det første element i vektoren E_t[Z(t,T)] og som 1,1 elementet i matricen V_t[Z(t,T)].

$$E_t[Y(t,T)] = \underline{\omega}^T\int_t^T\left[e^{-\underline{\underline{B}}(s-t)}\underline{X}(t) + \int_v^s e^{-\underline{\underline{B}}(s-v)}\underline{b}dv\right]ds$$

$$= \underline{\omega}^T\underline{\underline{Q}}\underline{\underline{A}}^{-1}[\underline{\underline{I}} - e^{-\underline{\underline{A}}(T-t)}]\underline{\underline{Q}}^{-1}\underline{X}(t)$$

$$+ \underline{\omega}^T\left[-\int_t^T e^{-\underline{\underline{B}}(s-t)}\underline{b}\underline{\underline{B}}^{-1}ds + \int_t^T \underline{\underline{I}}\underline{b}\underline{\underline{B}}^{-1}ds\right]$$

$$\Rightarrow E_t[Y(t,T)] = \underline{\omega}^T\underline{\underline{Q}}\underline{\underline{A}}^{-1}[underlineunderlineI - e^{-\underline{\underline{A}}(T-t)}][\underline{\underline{Q}}^{-1}\underline{\underline{B}}^{-1}\underline{b} - \underline{\underline{Q}}^{-1}\underline{X}(t)]$$

$$+ \underline{\omega}^T\underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{I}}\underline{b}(T-t)$$

Den forventede værdi E_t[Y(t,T)] får herefter følgende udseende:
og variansen V_t[Y(t,T)] får følgende udseende:

$$V_t[Y(t,T)] = \underline{\omega}^T\int_t^T \underline{\underline{QA}}^{-1}(\underline{\underline{I}} - e^{-\underline{\underline{A}}(s-t)})\underline{\underline{Q}}^{-1}\underline{\underline{SS}}^T\underline{\underline{QA}}^{-1}(\underline{\underline{I}} - e^{-\underline{\underline{A}}(s-t)})\underline{\underline{Q}}^{-1}\underline{\omega}ds$$

$$= \underline{\omega}^T\int_t^T \underline{\underline{QA}}^{-1}e^{-\underline{\underline{A}}(s-t)}\underline{\underline{Q}}^{-1}\underline{\underline{SS}}^T(\underline{\underline{Q}}^{-1})^T\underline{\underline{A}}^{-1}e^{-\underline{\underline{A}}(s-t)}\underline{\underline{Q}}^T\underline{\omega}ds$$

$$-\underline{\omega}^T\int_t^T \underline{\underline{QA}}^{-1}e^{-\underline{\underline{A}}(s-t)}\underline{\underline{Q}}^{-1}\underline{\underline{SS}}^T(\underline{\underline{Q}}^{-1})^T\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{IQ}}^T\underline{\omega}ds$$

$$-\underline{\omega}^T\int_t^T \underline{\underline{QA}}^{-1}\underline{\underline{IQ}}^{-1}\underline{\underline{SS}}^T(\underline{\underline{Q}}^{-1})^T\underline{\underline{A}}^{-1}e^{-\underline{\underline{A}}(s-t)}\underline{\underline{Q}}^T\underline{\omega}ds$$

$$+\underline{\omega}^T\int_t^T \underline{\underline{QA}}^{-1}\underline{\underline{IQ}}^{-1}\underline{\underline{SS}}^T(\underline{\underline{Q}}^{-1})^T\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{IQ}}^T\underline{\omega}ds$$

$$V_t[Y(t,T)] = \underline{\omega}^T\int_t^T \underline{\underline{QA}}^{-1}e^{-\underline{\underline{A}}(s-t)}\underline{\underline{Q}}^{-1}\underline{\underline{SS}}^T(\underline{\underline{Q}}^{-1})^T\underline{\underline{A}}^{-1}e^{-\underline{\underline{A}}(s-t)}\underline{\underline{Q}}^T\underline{\omega}ds$$

$$- \underline{\omega}^T[\underline{\underline{QA}}^{-1}\underline{\underline{A}}^{-1}e^{-\underline{\underline{A}}(T-t)}\underline{\underline{Q}}^{-1} - (\underline{\underline{BB}})^{-1}]\underline{\underline{SS}}^T(\underline{\underline{B}}^{-1})^T\underline{\omega}$$

$$- \underline{\omega}^T\underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{SS}}^T[(\underline{\underline{Q}}^{-1})^T\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}}^{-1}e^{-\underline{\underline{A}}(T-t)}\underline{\underline{Q}}^T - (\underline{\underline{BB}})^{-1^T}]\underline{\omega}$$

$$+ \underline{\omega}^T\underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{SS}}^T(\underline{\underline{B}}^{-1})^T\underline{\omega}(T-t)$$

som medfører at

Formel 94 ses at være identisk med Langetiegs formel 32, på nær at i formel 94 er egenværdi-dekomponeringen blevet udført. Endvidere kan det indses, at formel 96 er identisk med Langetiegs formel 33. Her er forskellen dog også, at i formel 96 er egenværdi-dekomponeringen foretaget, samt at der er inkorporeret den egenskab, at den transponerede til en diagonal-matrice er identisk med matricen selv.

Der er dog endnu et udestående i formel 96, og der er følgende integral:

$$\Sigma = \underline{\omega}^T \int_t^T \underline{\underline{Q}}\underline{\underline{A}}^{-1} e^{-\underline{\underline{A}}(s-t)} \underline{\underline{Q}}^{-1} \underline{\underline{S}}\underline{\underline{S}}^T (\underline{\underline{Q}}^{-1})^T \underline{\underline{A}}^{-1} e^{-\underline{\underline{A}}(s-t)} \underline{\underline{Q}}^T \underline{\omega} ds$$

Langetieg note 23 og Beaglehole og Tenney foreslår en egenværdi-dekomponering til løsning af ovenstående integral, som i den forbindelse medfører, at formel 97 kan skrives på følgende

$$\Sigma = -\underline{\omega}^T \underline{\underline{Q}}(\underline{\underline{I}} - e^{-\underline{\underline{A}}(T-t)}) \left(\frac{\underline{\underline{V}}}{\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}} \right) (\underline{\underline{I}} + e^{-\underline{\underline{A}}(T-t)}) \underline{\underline{Q}}^T \underline{\omega}$$

for

$$\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{Q}}^{-1} \underline{\underline{S}}\underline{\underline{S}}^T (\underline{\underline{Q}}^{-1})^T \underline{\underline{A}}^{-1}$$

form:

$$V_t[Y(t,T)] = -\underline{\omega}^T \underline{\underline{Q}}(\underline{\underline{I}} - e^{-underlineunderlineA(T-t)}) \left(\frac{\underline{\underline{V}}}{\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}} \right) (\underline{\underline{I}} + e^{-\underline{\underline{A}}(T-t)}) \underline{\underline{Q}}$$
$$- \underline{\omega}^T [\underline{\underline{Q}}\underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{A}}^{-1} e^{-\underline{\underline{A}}(T-t)} \underline{\underline{Q}}^{-1} - (\underline{\underline{B}}\underline{\underline{B}})^{-1}] \underline{\underline{S}}\underline{\underline{S}}^T (\underline{\underline{B}}^{-1})^T \underline{\omega}$$
$$- \underline{\omega}^T \underline{\underline{B}}^{-1} \underline{\underline{S}}\underline{\underline{S}}^T [(\underline{\underline{Q}}^{-1})^T \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{A}}^{-1} e^{-\underline{\underline{A}}(T-t)} \underline{\underline{Q}}^T - (\underline{\underline{B}}\underline{\underline{B}})^{-1^T}] \underline{\omega}$$
$$+ \underline{\omega}^T \underline{\underline{B}}^{-1} \underline{\underline{S}}\underline{\underline{S}}^T (\underline{\underline{B}}^{-1})^T \underline{\omega}(T - t)$$

for

$$\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{Q}}^{-1} \underline{\underline{S}}\underline{\underline{S}}^T (\underline{\underline{Q}}^{-1})^T \underline{\underline{A}}^{-1}$$

Dette medfører, at $V_t[Y(t,T)]$ kan skrives på følgende endelige form:
Den generelle prisformel for denne multi-faktor rentestrukturmodel kan hermed formuleres

$$P(t,T) = e^{[-\underline{\underline{Q}}\underline{\underline{A}}^{-1}[\underline{\underline{I}} - e^{-\underline{\underline{A}}(T-t)}][\underline{\underline{Q}}^{-1}\underline{\underline{B}}^{-1}\underline{b} - \underline{\underline{Q}}^{-1}\underline{X}(t)] - \underline{\underline{B}}^{-1}\underline{b}(T-t) - \frac{1}{2}[\Sigma + T + T^T] + \frac{1}{2}\underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{S}}\underline{\underline{S}}^T(\underline{\underline{B}}^{-1})^T(T-t)}$$

for

$$\Sigma = \underline{\underline{Q}}[\underline{\underline{I}} - e^{-\underline{\underline{A}}(T-t)}] \left[\frac{\underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{Q}}^{-1} \underline{\underline{S}}\underline{\underline{S}}^T (\underline{\underline{Q}}^{-1})^T \underline{\underline{A}}^{-1}}{\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}} \right] [\underline{\underline{I}} + e^{-\underline{\underline{A}}(T-t)}] \underline{\underline{Q}}^T$$

og

$$T = [\underline{\underline{Q}}\underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{A}}^{-1} e^{-\underline{\underline{A}}(T-t)} \underline{\underline{Q}}^{-1} - (\underline{\underline{B}}\underline{\underline{B}})^{-1}] \underline{\underline{S}}\underline{\underline{S}}^T (\underline{\underline{B}}^{-1})^T$$

således (vektoren af vægte w vil for at lette notationen fremover være underforstået):
som kan indses at ville degenerere til Vasiceks prisformel for **B** = κ, **X**(t) = r, **S** = σ, **a** = κθ og **λ** = λ.

$$R(\infty) = \underline{\underline{B}}^{-1}\underline{b} - \frac{1}{2}\underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{S}}\underline{\underline{S}}^T(\underline{\underline{B}}^{-1})^T$$

The asymptotic behavioir for the yield-curve for T → ∞ can be written as:
Denne asymptotiske egenskab kan også vises at resultere i den asymptotiske egenskab, der gælder for Vasiceks en-faktor version med de ovenfor foretagne specifikationer.

Kravet til, at formel 101 er valid, er, at multifaktormodellen er stationær, hvor kravet her er, at

alle egenværdierne til matricen **B** (dvs matricen **A**), skal være negative, eller mere generelt have negative reelle komponenter. Dette er indlysende i tilfældet for Vasiceks en-faktor model, i og med at det her eksplicit er antaget, at spotrenten følger en elastic random walk, som bekendt har den implikation, at $\kappa > 0$.

Hvis ikke alle egenværdierne har negative reelle komponenter, vil dette resultere i, at processens varians eksploderer, hvilket pr. definition har den implikation, at processen i økonometrisk forstand ikke vil være stationær. Det kan dog ikke afvises, at den overordnede proces inden for en endelig tids-horisont (selvom en eller flere af egenværdierne har positive reelle komponenter) vil udvise et relativt "stabilt" forløb[57]. Dette kan i økonomisk forstand være tilstrækkeligt, hvis den betragtede fordring har en endelig løbetid.

Hvis jeg kort skulle relatere denne generelle multifaktor proces til Heath, Jarrow og Mortons

$$\sigma^F(t,T) = \underline{Q}e^{-\underline{A}(T-t)}\underline{Q}^{-1}\underline{S}$$

framework, kan det vises at forwardrentevolatilitetsstrukturen kan skrives på følgende form[58]:

$$\sigma_P(t,T) = \int_t^T \sigma^F(t,s)ds = \underline{Q}\underline{A}^{-1}[\underline{I} - e^{-\underline{A}(T-t)}]\underline{Q}^{-1}\underline{S}$$

som betyder, at obligationspris-volatilitetsstrukturen kan udtrykkes således:

$$\sigma_R(t,T) = \frac{1}{D_{T-t}}\sigma_P(t,T)$$

og slutteligt kan spotrente-volatilitetsstrukturen skrives som:
hvor D_{T-t} er varigheden på en nulkuponobligation på tidspunkt t der udløber på tidspunkt T.

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = [r + \underline{\sigma}_P^T\underline{\lambda}]dt + \underline{\sigma}_P^T dW$$

Den proces der driver obligationspriserne kan endvidere skrives således:
hvor $\sigma_P(t,T)$ er defineret som i formel 103.

Et eksempel på en specifik model i dette framework, er Beaglehole og Tenneys (1991) to-faktor "double-decay" model, hvor det antages, at spotrenten er defineret ved følgende sammensatte diffusionsproces:

[57] Se Madsen (1994b) for en praktisk indfaldsvinkel og diskussion af stationaritet. Se endvidere Beaglehole og Tenney (1991) note 6.

[58] Se Madsen (1995b).

$$dr = \kappa[\theta - r]dt + \sigma dW_1$$
$$d\theta = \kappa_2[\theta_2 - \theta]dt + \sigma_2 dW_2$$

hvor $dW_1 dW_2 = \rho dt$. Denne proces indikerer, at spotrenten følger en mean-reverting Ornstein-Uhlenbeck proces, som er identisk med Vasiceks en-faktor spotrenteproces. Denne proces er dog udvidet på den måde, at middelværdirenteniveauet også er antaget at følge en mean-reverting Ornstein-Uhlenbeck proces.

Beaglehole og Tenney antager yderligere, at κ, $\kappa_2 > 0$, dvs at henholdsvis spotrenten og middelværdirenteniveauet følger en elastic random walk proces.

$$\begin{bmatrix} dr \\ d \\ \theta \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 0 \\ \kappa_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\kappa & \\ \kappa & 0 \\ & -\kappa_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix}\right]dt + \begin{bmatrix} S_{11} & 0 \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dW \\ dW_2 \end{bmatrix}$$

I matrix notation kan denne "double-decay" model skrives således:
Her findes elementerne i S (S_{11}, S_{21} og S_{22}) ved anvendelse af Choleskifaktorisering[59], da denne metode kan anvendes til at udtrykke en positiv definit og symmetrisk matrice ved matrixproduktet af en nedre trekantsmatrice **S** og den transponerede af **S**. Den matrice, som vi ønsker at udtrykke ved dette matrixprodukt, vides at opfylde de to ovenfor nævnte betingelser, da det er variansmatricen SS^T, der selvfølgelig her tænkes på. I dette tilfælde er den defineret

$$\underline{\underline{SS^T}} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \rho \\ \sigma & \sigma_2 \\ \rho & \sigma \\ \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

således:
På grund af antagelsen om, at κ og κ_2 skal være større end nul, og da det vides at egenværdierne til en trekantsmatrice er defineret ved diagonalelementerne, vides det, at processen er stationær.

I modsætning hertil definerer Kraus og Smith (1993) derimod en 3-faktor rentestrukturmodel, hvor deres udgangspunkt er en empirisk analyse foretaget af Litterman og Scheinkman (1988), hvor de ved anvendelse af principal komponent analyse påviser, at variationen i rentestrukturen kan forklares ved 3 faktorer.

Kraus og Smiths model kan skrives således:

[59] Se "Løsning af lineære ligningssystemer" hæfte 23 fra Numerisk Institut DTH.

$$dr = \mu dt + \sigma dW$$
$$d\mu = mdt + \sigma_2 dW_2$$
$$d\alpha = dm - d\sigma^2 = bdt + \sigma_3 dW_3$$

De antager, at $dW_i dW_j = \rho_{ij}$, men i selve opstillingen af deres partielle differentialligning udelader de alle de led hvor korrelationskoefficienten indgår, således at de reelt set antager, at $\rho_{ij} = 0$ (se deres formel 2 side 21). Under antagelse om uafhængighed imellem de enkelte

$$\begin{bmatrix} dr \\ d \\ \mu \\ d \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} S_{11} & 0 & 0 \\ 0 & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW \\ dW_2 \\ dW_3 \end{bmatrix}$$

Wiener processer kan deres model formuleres således i matrixnotation:
De antager altså for det første, at spotrenten følger en random walk, for det andet at driften i spotrenten følger en random walk, og slutteligt antager de, at forskellen imellem driften i den proces der driver spotrentens drift og variansen i spotrenteprocessen også følger en random walk.

Disse to eksempler er givet her for at vise, at der eksisterer, og kan defineres en lang række modeller, enten rene random walk- eller Ornstein-Uhlenbeck-modeller eller kombinationer heraf, som det er muligt at "fitte" ind i dette temmelig generelle framework.

7. Ikke-lineære rentestrukturmodeller

Indledningsvis kunne det være på sin plads at definere, hvad der forstås ved, at en rentestrukturmodel er ikke-lineær.

Definition nr. 3

En rentestrukturmodel siges at være ikke-lineær, hvis den effektive nulkuponrente er ikke-lineær i ændringer i en af tilstandsvariablene.

Det medfører altså, at rentestrukturmodeller hvorom det gælder, at den funktionelle form for

$$P(t,T) = e^{A(\tau) + B(\tau)X_1(t) + C(\tau)X_2(t)}$$

obligationspriserne kan skrives på følgende form:
kaldes for ikke lineære affine rentestrukturmodeller hvis enten $X_1(t)$ eller $X_2(t)$ er ikke-lineære variable. Hvor $\tau = T-t$, dvs repræsenterer restløbetiden og $X_i(t)$ for i={1,2} er den øjeblikkelige værdi af tilstandsvariablene.

Den første ikke-lineære rentestrukturmodel der blev introduceret, var Longstaffs (1989) en-faktor DSR (double-square-root) model, hvor han antog, at spotrenten fulgte følgende

$$dr = \kappa(\frac{\sigma^2}{4\kappa} - \sqrt{r})dt + \sigma\sqrt{r}dW$$

stokastiske proces:
for $\kappa,\sigma > 0$.

Dette udtryk fremkommer ved, at han opstiller en økonomi med èn underliggende tilstandsvariabel X, som følger en stationær random walk, $dX = mdt + sdW$, for $m < 0$. Yderligere i stil med CIR-modellen antages det, at den forventede værdi og varians af produktionsafkastet er proportional, dog ikke i forhold til X (det lineære tilfælde) men derimod til X^2 (det ikke-lineære tilfælde). Dette har nemlig den implikation, at selvom den underliggende økonomi ikke indeholder mean-reversion, vil dette komme til at gælde for ligevægtsrenten. Da $r = cX^2$, for c værende en positiv konstant. Ved at anvende Itos lemma herpå, samt foretage en variabel ændring, kan dette vises at ville resultere i formel 112.

$$\Gamma(t) = 2\lambda r$$

Den funktionelle form for præferencestrukturen i Longstaff modellen har følgende udseende:
for λ værende konstant.

Dette medfører, at den risikoneutrale proces for spotrenten i dette framework kan skrives

$$dr = [r + 2\lambda r]dt + \sigma\sqrt{r}dW$$

således:
Den partielle differentialligning, som alle fordringer der kun er en funktion af t og r skal

$$P_t + \left[\frac{\sigma^2}{4} - \kappa\sqrt{r} - 2\lambda r\right]P_r + \frac{1}{2}\sigma^2 rP_{rr} - rP = 0$$

tilfredsstille, kan hermed skrives som:
som er identisk med Longstaffs formel 11 på side 202.

Det funktionelle udtryk for prisen på tidspunkt t på en nulkuponobligation, der udløber på tidspunkt T, finder han at være defineret således:

$$P(t,T) = e^{A(\tau) + B(\tau)r + C(\tau)\sqrt{r}}$$

for

$$A(\tau) = \ln\left(\frac{1 - c_0}{1 - c_0 e^{\gamma\tau}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(c_1 + c_2\tau + \frac{c_3 + c_4 e^{\frac{1}{2}\gamma\tau}}{1 - c_0 e^{\gamma\tau}}\right)$$

$$B(\tau) = \frac{2\lambda - \gamma}{\sigma^2} + \frac{2\gamma}{\sigma^2(1 - c_0 e^{\gamma\tau})}$$

$$C(\tau) = \frac{2\kappa(2\lambda + \gamma)\left(1 - e^{\frac{1}{2}\gamma\tau}\right)^2}{\gamma\sigma^2(1 - c_0 e^{\gamma\tau})}$$

hvor

$$\gamma = \sqrt{4\lambda^2 + 2\sigma^2}$$

$$c_0 = \frac{2\lambda + \gamma}{2\lambda - \gamma}$$

$$c_1 = -\frac{\kappa^2(4\lambda + \gamma)(2\lambda - \gamma)}{\gamma^3\sigma^2}$$

$$c_2 = \frac{2\lambda + \gamma}{4} - \frac{\kappa^2}{\gamma^2}$$

$$c_3 = \frac{4\kappa^2(2\lambda^2 - \sigma^2)}{\gamma^3\sigma^2}$$

$$c_4 = -\frac{8\lambda\kappa^2(2\lambda + \gamma)}{\gamma^3\sigma^2}$$

som givet de usikre parametre λ, κ og σ gør det muligt at finde obligationspriserne.

Dette udtryk skulle være løsningen til den partielle differentialligning fra formel 115, givet randbetingelsen P(T,T) = 1, samt under den antagelse, at økonomiens tilstandsvariabel X bliver reflekteret for X = 0. Dette er blevet vist af Beaglehole og Tenney (1992) ikke at være tilfældet. Derimod er formel 116 løsningen til den partielle differentialligning i det tilfælde, at X ikke bliver reflekteret for X = 0. Det kan altså konkluderes, at Longstaffs prisformel ikke er løsningen til den modeløkonomi han opstiller[60].
Indledningsvis til dette afsnit blev det påpeget, at de tilladte rentestrukturskift i denne en-faktor ikke-lineære rentestrukturmodel var væsentligt mere nuanceret end dem, som

[60] Det forhold, at Longstaffs model ikke er løsningen til præcis det problem han opstiller, er også blevet nævnt af ham selv i 1992 i artiklen "Multiple equilibria and term structure models". Hovedformålet med denne artikel er dog ikke dette resultat men at påvise, at der i det tilfælde, hvor renten/tilstandsvariablen kan blive lig nul (hvor det gælder at det er nødvendigt at definere, hvorledes tilstandsvariablen skal opføre sig efter sin første passage til nul) er muligt at udlede en række forskellige ligevægtsresultater, alt efter hvorledes denne definition foretages. Følgende citat, som er taget fra Longstaff (1992) side 336, som igen er taget fra Karlin og Taylor "A second course in Stochastic processes" (1981), side 239, giver en fornemmelse af, hvilke muligheder der faktisk er: *"For a regular boundary a variety of boundary behavior can be prescribed in a consistent way, including the contingencies of complete absorption or reflecting, elastic or sticky barrier phenomena, and even the possibility of the particle (path), when attaining the boundary point, waiting there for an exponentially distributed duration followed by a jump into the interior of the state space according to a specified probability distribution".*

eksempelvis var mulige i Cox, Ingersoll og Ross` en-faktor model. Måden at indse dette på er ved at betragte processen for obligationspriserne under det originale sandsynlighedsmål. I Longstaffs framework kan det ved at anvende Itos lemma på formel 116 vises at resultere i

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = (r + 2\lambda(B(\tau)r + \lambda C(\tau)\sqrt{r}))dt + (B(\tau)\sqrt{r} + \frac{C(\tau)}{2})\sigma dW$$

følgende udtryk:
I modsætning hertil kan processen, der driver obligationspriserne i Cox, Ingersoll og Ross

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = (r + B(\tau)\lambda r)dt + B(\tau)\sigma\sqrt{r}dW$$

modellen, vises at have følgende form:
Herudfra fremgår det tydeligt, at terminspræmien (dvs det forventede afkast minus r) i

$$\frac{E_t[dP(t,T)]}{P(t,T)} - r = \lambda[2B(\tau)r + C(\tau)\sqrt{r}] \quad \textit{for Longstaff}$$

$$\frac{E_t[dP(t,T)]}{P(t,T)} - r = B(\tau)\lambda r \quad \textit{for CIR}$$

henholdsvis Longstaff og CIR modellen kan udtrykkes således:
hvor det med al ønskelig tydelighed fremgår, at terminspræmien i Longstaff modellen er væsentlig mere nuanceret i form end risikopræmien for CIR modellen, hvor risikopræmien kun kan være enten negativ eller positiv for alle T-t. I CIR-modellen er det endvidere fortegnet på risikoparameteren λ, der bestemmer dette, da $B(\tau)$ og $r > 0$. Hvad derimod angår risikopræmien i Longstaff, kan denne være positiv for nogle restløbetider og negativ for andre, se graferne i Longstaffs (1989) artikel.

På trods af den uheldige konsekvens ved Longstaff-modellen, at den ikke er løsningen til den modeløkonomi han opstiller, tyder det alligevel på, at modellen performer relativt fornuftigt i praksis, hvis de usikre parametre bliver valgt i realistiske intervaller, se Longstaff (1989). For en større empirisk analyse foretaget af Longstaff- modellen på det danske obligationsmarked, henvises til Madsen (1994b).

For lige at runde de såkaldte kvadratiske rentestrukturmodeller af, vil det her blive vist, hvorledes obligationspriser kan findes i en en-faktor kvadratisk rentestrukturmodel, under

$$dx = \kappa[\theta - x]dt + \sigma dW$$
$$\textit{for}$$
$$r = x^2$$

hensyntagen til følgende postulerede spotrenteproces:

Den partielle differentialligning som alle fordringer der kun er en funktion af x (dvs r) og t skal tilfredsstille, kan nu findes ved anvendelse af Itos lemma og det risikofri

$$P_t + P_x[\kappa\theta - \kappa x - \lambda\sigma] + \frac{1}{2}\sigma^2 P_{xx} - rP = 0$$

arbitrageargument:
Hvor det er antaget, at markedsrisikoparameteren er defineret ved $\lambda\sigma$.

Løsningen til denne partielle differentialligning er vist af bl.a. Beaglehole og Tenney (1991),

$$P(t,T) = e^{x^2 A(t,T) + B(t,T)x + C(t,T)}$$

og kan skrives på følgende form:
hvor det heraf tydeligt fremgår, at den kvadratiske rentestrukturmodel kan forstås som en to-faktor lineær rentestrukturmodel med tilstandsvariablene x^2 og x. Dog er der i den kvadratiske rentestrukturmodel kun en markedsrisikoparameter.

Faktisk kan prisen på en nulkuponobligation i den kvadratiske rentestrukturmodel udtrykkes

$$P(t,T) = e^{x^2 A(\tau) + xB(\tau) + C(\tau)}$$

for

$$A(\tau) = -\frac{e^{2\gamma\tau} - 1}{2\gamma + [\gamma + \kappa][e^{2\gamma\tau} - 1]}$$

$$B(\tau) = -\int_0^\tau 2A(s)[\kappa\theta - \Gamma]\frac{H(s)}{H(\tau)}ds$$

$$C(\tau) = \int_0^\tau B(s)[\kappa\theta - \Gamma]ds + \frac{1}{2}\sigma^2\int_0^\tau [2A(s) + B^2(s)]ds$$

og

$$H(v,T) = e^{\gamma v}[(\kappa + \gamma)e^{2\gamma(T - v)} + (\gamma - \kappa)]$$

$$\gamma = \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma^2}$$

ved følgende semi-analytiske udtryk[61]:

I den kvadratiske rentestrukturmodel kan det, ved at anvende Itos lemma, vises, at dynamikken i obligationspriserne er givet ved:

[61] I Appendix F er udledt det semi-analytiske prisudtryk for den en-dimensionelle kvadratiske rentestrukturmodel.

Fejl!

for markedsrisikoparameteren defineret som $\lambda\sigma$.

Dette ikke-lineære framework er af Beaglehole og Tenney (1991) blevet generaliseret til det m-dimensionelle tilfælde, se endvidere Jamshidian (1993) hvor den kvadratiske rentestrukturmodel også er behandlet.

En helt ny type af rentestrukturmodel, som dog må betragtes at tilhøre klassen af ikke-lineære rentestrukturmodeller, er Constantinides (1992) model. I denne model foretages der ikke eksplicit nogen antagelse om hvilken, eller nærmere sagt hvilke tilstandsvariable, der driver dynamikken i rentestrukturen. Mere præcist specificeres ingen som helst tilstandsvariable. Derimod er hovedessensen i denne model, at det ikke er tilstandsvariablene eller for den sags skyld deres dynamik, der specificeres. Det er processen for prisens tæthedsfunktion, der bliver defineret. Det er dog muligt efterfølgende at finde den proces, der implicit bliver antaget at være processen, der driver spotrenten. Det vil fremgå af det efterfølgende.

Med udgangspunkt i Harrison og Kreps (1979) kan prisen på tidspunkt t på en fordring, der

$$P(t,T) = \frac{E_t[M(T)]}{M(t)}$$

betaler en krone på tidspunkt T, skrives således:
hvor $E_t[.]$ repræsenterer forventningsoperatoren betinget af informationssættet på tidspunkt t.

Ideen i Constantinides framework er herefter at specificere tæthedsfunktionen M(t).

Constantinides definerer processen M(t) i et m-dimensionelt framework som værende af

$$M(t) = \exp[-(g + \sigma_0^2)t + x_0(t) + \sum_{i=1}^{m}(x_i(t) - \alpha_i)^2]$$

følgende form:
I denne definition er $x_0(t)$ defineret som en Wiener proces med variansen σ_0^2 . Yderligere er processen $x_i(t)$, i = 1,2,...,m, givet ved m uafhængige Ornstein-Uhlenbeck diffusionsprocesser,

$$x_i(t) = x_i(0)e^{-\lambda_i t} + \sigma_i\int_0^t e^{-\lambda_i(t-s)}dW_i(s),\ i = 1,2,....,m$$

defineret ved følgende integral:
hvor den forventede værdi for henholdsvis processen $x_0(t)$ og $x_i(t)$ har følgende udseende:

$$E[x_0(t)] = x_0(0)$$
$$E[x_i(t)] = x_i(0)e^{-\lambda_i t}, \quad i = 1,2,.....,m$$

$$V_t[x_0(t)] = \sigma_0^2$$
$$og$$
$$\int_0^t \sigma_i e^{-\lambda_i(t-s)} dW_i(s) \sim N\left(0, \int_0^t (\sigma_i e^{-\lambda_i(t-s)})^2 ds\right)$$
$$\Rightarrow V_t[x_i(t)] = \int_0^t (\sigma_i e^{-\lambda_i(t-s)})^2 ds = \frac{\sigma_i^2}{2\lambda_i}(1 - e^{-2\lambda_i t})$$

og variansen for disse processer kan yderligere skrives således:
Ud fra disse to relationer fremgår det for det første, at x_0 (t) følger en random walk, og for det andet at den stokastiske proces for x_i(t), i = 1,2,....,m, kan skrives som $dx_i = -\lambda_i x_i dt + \sigma_i dW_i$
.

Hvor det er vist af Constantinides, at ved at forlange følgende parameterrestriktioner vil dette

$$\lambda_i > 0$$
$$\sigma_i^2 < \lambda_i$$
$$g - \sum_{i=1}^{m}\left(\sigma_i^2 + \frac{\lambda_i \alpha_i^2}{2\left(1 - \frac{\sigma_i^2}{\lambda_i}\right)}\right) > 0$$

medføre, at prisens tæthedsfunktion (M(t)) indikerer, at renterne ikke kan blive negative:
Obligationsprisudtrykket kan hermed findes ved at finde den forventede værdi af følgende

$$P(t,T) = \exp\left[-(g + \frac{\sigma_o^2}{2})(T - t)\right] \times$$
$$E_t[\exp[x_0(T) - x_o(t)]] \times$$
$$\prod_{i=1}^{m} E_t[\exp[(x_i(T) - \alpha_i)^2 - (x_i(t) - \alpha_i)^2]]$$

udtryk:
Da x_0(t) er normalfordelt med forventet værdi $x_0(0)$ og varians $\sigma^2{}_0$t vides det, at den moment genererende funktion har følgende udseende $E_t[e^{x_o(t)}] = e^{[x_o(0) + \frac{1}{2}\sigma_o^2 t]}$, således at dette

$$P(t,T) = \exp[-g(T-t)] \prod_{i=1}^{m} E_t[\exp[(x_i(T)-\alpha_i)^2 - (x_i(t)-\alpha_i)^2]]$$

udtryk kan omskrives til[62]:
I og med at $x_i(t)$ er normalfordelt med parameterne μ og s^2 medfører dette, at $(x_i(t) - \alpha_i)^2$er en ikke-central χ^2 - fordeling, som bekendt har følgende moment

$$E_t[\exp(x_i(t+\tau)-\alpha_i)^2] = H(t,T)^{-0.5}\exp\left[\lambda_i\tau + \frac{(x_i(t)-\alpha_i e^{\lambda_i\tau})^2}{H(t,T)}\right]$$

for

$$H(t,T) = \frac{\sigma_i^2}{\lambda_i} + \left(1 - \frac{\sigma_i^2}{\lambda_i}\right)e^{2\lambda_i\tau}$$

genererende funktion[63]:
hvor τ repræsenterer T-t.

Dette udtryk betyder, at det endelige obligationsprisudtryk i en m-faktor Constantinides model

$$P(t,T) = \left[\prod_{i=1}^{m} H_i(t,T)^{-\frac{1}{2}}\right]\exp[(-g + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i)(T-t)] \times$$
$$\exp\left[\sum_{i=1}^{m}\frac{(x_i(t)-\alpha_i e^{\lambda_i(T-t)})^2}{H_i(t,T)} - \sum_{i=1}^{m}(x_i(t)-\alpha_i)^2\right]$$

for

$$H_i(t,T) = \frac{\sigma_i^2}{\lambda_i} + \left(1 - \frac{\sigma_i^2}{\lambda_i}\right)e^{2\lambda(T-t)}$$

kan skrives således:
Som er ækvivalent med Constantinides formel 15.

Rentestrukturen kan herefter skrives som

$$R(t,T) = g - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i + \frac{1}{T-t}\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{1}{2}\ln H_i(t,T) + (x_i(t)-\alpha_i)^2 - \frac{(x_i(t)-\alpha_i e^{\lambda_i(T-t)})^2}{H_i(t,T)}\right]$$

[62] Heraf fremgår det, at $x_0(t)$ ikke optræder i obligationsprisudtrykket. Dette betyder, at hvis man "kun" er interesseret i at finde et udtryk for obligationspriser, kunne det ligeså godt være antaget at $\sigma_0 = 0$. Dog vil en antagelse om, at $\sigma_0=0$, have den implikation, at prisprocessen er stationær, hvilket ikke nødvendigvis er ønsket .

[63] Se Johnson og Kotz (1970), kapitel 28 og 29.

$$\lim_{T \to \infty} R(t,T) \to g$$

$$\lim_{T \to t} R(t,T) \to g$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \left[-\sigma_i^2 - \frac{\lambda_i \alpha_i^2}{2\left(1 - \frac{\sigma_i^2}{\lambda_i}\right)} + 2\lambda\left(1 - \frac{\sigma_i^2}{\lambda_i}\right) \times \left(x_i(t) - \alpha_i + \frac{\alpha_i}{2\left(1 - \frac{\sigma_i^2}{\lambda_i}\right)} \right)^2 \right]$$

som har følgende asymptotiske egenskaber:
Dette betyder altså, at g kan betragtes som et udtryk for den effektive nulkuponrente på konsolobligationen, som endvidere ikke kan blive negativ i henhold til kriterium nummer 3 fra formel 130. Et forhold skal dog pointeres her. Det er, at det selvfølgelig tydeligt fremgår, at kriterium nummer 3 klart er en tilstrækkelig betingelse for positive renter, givet kriterienumrene 1 og 2. Et brud på kriterium nummer 3 er dog ikke ensbetydende med negative renter, således at dette kriterium i mange tilfælde må betragtes som værende for restriktiv[64].

[64] For en nærmere diskussion heraf henvises til Madsen (1994b).

Ved at anvende Itos lemma på udtrykket for den effektive nulkuponrente for T → t, som bekendt er identisk med spotrenten - den risikofri rente, er det muligt at finde den proces, som denne model implicit antager at spotrenten følger. Dette resulterer i følgende udtryk (her vist i

$$dr(t) = 2\lambda\left(1 - \frac{\sigma^2}{\lambda}\right)\left[\sigma^2 - 2\lambda x(t)\left(x(t) - \alpha + \frac{\alpha}{2\left(1 - \frac{\sigma^2}{\lambda}\right)}\right)\right]dt$$
$$+ 4\lambda\left(1 - \frac{\sigma^2}{\lambda}\right)\left(x(t) - \alpha + \frac{\alpha}{2\left(1 - \frac{\sigma^2}{\lambda}\right)}\right)\sigma dW$$

det en-dimensionelle tilfælde)[65]:
Her kunne det også være interessant at få belyst, hvorledes termimspræmien (dvs det forventede afkast minus r) udvikler sig. Jeg vil her indskrænke mig til det en-dimensionelle tilfælde for at vise, at selv i sin mest simple form indeholder denne model den egenskab, at terminspræmien kan være negativ for nogle obligationer og positiv for andre.

$$\frac{E[dP(t,T)]}{P(t,T)} - r = -4\sigma^2(x(t) - \alpha)\left[\frac{x(t) - \alpha e^{\lambda(T-t)}}{H(t,T)} - x(t) + \alpha\right]$$

Terminspræmien kan findes ved at løse følgende forventningsoperator:
Dette udtryk ses at være identisk med Constantinides formel 21 for m=1. Et forhold i forbindelse med udledningen af dette udtryk skal dog nævnes. Det er, at dette udtryk er fundet ved at anvende Itos lemma på obligationsudtrykket under hensyntagen til det ækvivalente martingale mål for x(t), som har følgende udseende for processen for x(t),
$E_t[dx(t)] = [-\lambda x(t) + 2\sigma^2[x(t) - \alpha]]dt$, og som betyder at $E_t\left[\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = rdt\right]$.
Ved derefter at anvende udtrykket for risikoparameteren μ - Γ = r, findes Γ - da r nu er fundet (dvs den risikoneutrale drift) ved følgende omskrivning Γ = - (r - μ). Alt dette resulterer i udtrykket givet ved formel 138.

Ud fra dette udtryk fremgår det også, som for eksempelvis Longstaff-modellen, at fortegnene for terminspræmien selv i en en-faktor model ikke nødvendigvis behøver at være af ens fortegn.

8. Opsummering og diskussion

[65] Dette udtryk afviger lidt fra Constantinides formel 20. I stedet for σdW har han dW, som stammer fra definitionen af processen for $x_i(t)$.

Ud fra det foregående fremgår det, at der eksisterer en lang række forskellige modeltyper, som på hver sin måde angriber problemet med at modellere dynamikken i rentestrukturen på. Den generelle idè bag hver af modellerne er dog ens og kan, som nævnt indledningsvis, formuleres således:

1: Det forudsættes først, at de valgte tilstandsvariable indeholder tilstrækkelig statistik til at beskrive hele rentestrukturen,

2: derefter antages det, at disse tilstandsvariable endvidere er i stand til at beskrive dynamikken i rentestrukturen.

Et klart praktisk problem her er, at der ingen garanti er for, at den resulterende rentestruktur faktisk vil matche den "rigtige" rentestruktur. Dette problem kan dog løses ved at gøre en eller flere af parameterne tids-afhængige[66], således at det er muligt at lave en diskret approksimation af den "rigtige" rentestrukturs kontinuerlige form, hvor den fejl der her begås kan minimeres ved at vælge tilstrækkelig mange punkter at matche, samt ved at vælge en passende interpolationsmetode.

Et forhold skal dog i den forbindelse nævnes. Det er, at selvom det er muligt at matche den "rigtige" rentestruktur ved at indføre tidsafhængighed, er dette ikke helt i ånd med selve idè-grundlaget givet ved de 2 ovenfor nævnte punkter.

Dette kan forklares ved, at hvis ikke modellen evner at matche rentestrukturen, så må en af følgende forhold gøre sig gældende:

1: enten er de enkelte tilstandsvariables stokastiske processer ikke korrekt defineret,

2: eller, så er antallet af tilstandsvariable forkert. Et andet forhold kan også gøre sig gældende, som påpeget af Constantinides (1992), og det er, at en eventuel forkastelse af en en-faktor model i forhold til en fler-faktor model også kunne forklares ved, at fortegnet på terminspræmien var af samme fortegn. Det forhold, at terminspræmien er af samme fortegn og endvidere monotonisk stigende i restløbetiden -som faktisk er gældende for alle de lineære en-faktor rentestruktur- har nemlig den uheldige implikation, at de tilladte twist i rentestrukturen er relativt begrænset, nemlig stigende, faldende og en enkelt pukkel.

Til alternative modeltyper som tillader, at terminspræmien er af forskellig fortegn -således at den ikke nødvendigvis er monotonisk

[66] Se bl.a. Hull og White (1990).

i restløbetiden (men godt kan være pukkelformet)- hører de ikke-lineære rentestrukturmodeller, se eksempelvis Longstaff (1989) og Constantinides (1992). Dette har da også den implikation, at de tilladte rentestrukturskift her er væsentligt mere nuancerede end i de traditionelle lineære rentestrukturmodeller.

Hvordan problemet skal løses vedrørende valg af en bestemt rentestrukturmodel, er derfor af gode grunde ikke helt indlysende.

Selvom det principielt set er muligt at teste alternative rentestruktur specifikationer op imod hinanden, se eksempelvis Chan, Karolyi, Longstaff og Sanders (1992), Flesaker (1992), Heston (1992), Chen og Scott (1993), Lund (1993), Zheng (1993) og Ait-Sahalia (1995), er det ikke indlysende - givet forkastelse af model/ler - i hvilken retning der skal "søges" for at finde "modellen": hvis en sådan overhovedet findes.

Disse modeller skal i princippet testes i et økonometrisk framework for at undersøge, om den/de postulerede processer, der driver dynamikken i rentestrukturen, herved kan antages at være en "god" beskrivelse af den data genererende proces (DGP), der historisk set har kunnet observeres.

En alternativ metode, som dog ikke gør valg af model nemmere, vil være at bruge en "praktisk" indfaldsvinkel. Dette gøres ved at fitte de resulterende analytiske udtryk til aktuelle prisdata dagligt[67]. Denne metode kan, som nævnt af Brown og Schaefer, betragtes som værende i ånd med den måde, hvorpå man estimerer implicit volatilitet på i Black og Scholes` (1973) aktieoptionsmodel.

Jeg skal ikke her på nogen måde foretage en detaljeret gennemgang af de empiriske analyser, der er blevet foretaget i litteraturen, men derimod henvise til Madsen (1994b) for en nærmere oversigt/uddybning.

Derimod vil jeg endnu engang pointere, at det at vælge en bestemt rentestrukturmodel, som det fremgår af det forestående, ikke er et helt trivielt problem.

9. Konklusion

Jeg har i dette arbejdspapir foretaget en analyse samt diskussion af en lang række af de kontinuerte rentestrukturmodeller, der er blevet foreslået i litteraturen, med vægten lagt på de såkaldte ligevægtsmodeller.

[67] Denne metode er bl.a. blevet anvendt af Brown og Dybvig (1986), Brenner (1989), Brown og Schaefer (1988), Barone, Cuoco og Zautzik (1991) og Madsen (1994b).

I den forbindelse startede jeg med en overordnet diskussion af forskellen imellem arbitrage-modeller og ligevægtsmodeller, hvor jeg ved arbitrage-modeller mente dem hvorom det gjaldt, at de pga konstruktionen automatisk ville matche initial-rentestrukturen. Ligevægtsmodeller antog jeg derimod at høre til den klasse af modeller som forudsatte, at de valgte tilstandsvariable kunne beskrive både initial-rentestrukturen og dynamikken heri.

Jeg startede min gennemgang med de første og nok mest kendte modeller på dette område, nemlig en-faktor modellerne herunder Cox, Ingersoll og Ross (1985) og Vasicek (1977) modellerne. Nogle betragtninger omkring prisfastsættelse af aktie-optioner, specielt med henvisning til Black og Scholes (1973) modellen blev også gjort.

Disse rentestrukturmodeller er dog alle af typen de lineære rentestrukturmodeller, som har den implikation, at renteændringer som en funktion af tilstandsvariablen alle vil have samme fortegn. Dvs "twist" i rentestrukturen er ikke en mulig tilstand. Dette var hovedårsagen til introduktionen af Brennan og Schwartz (1979), (1980), (1982) modellen, som jeg af den grund diskuterede i det efterfølgende afsnit. I forlængelse heraf blev Walters (1995) to-faktor model analyseret.

Derefter foretog jeg en diskussion af nogle af de sidste nye to-faktor modeller som er blevet foreslået i litteraturen, nemlig Longstaff og Schwartz (1990), (1992) og Vasicek og Fong (1991). Her forsøgte man at løse problemet vedrørende de lineære rentestrukturmodeller ved i modsætning til Brennan og Schwartz ikke at antage, at den anden tilstandsvariabel var konsolrenten, men at det derimod var volatiliteten i den korte rente. Ideen hertil kommer fra det forhold, at det i praksis kan observeres, at volatiliteten i den korte rente ikke er deterministisk, som antaget i eksempelvis Cox, Ingersoll og Ross modellen, men derimod kunne antages at ville følge en eller anden stokastisk proces.

En anden type af modeller er de såkaldte normalfordelte rentestrukturmodeller, som der blev pustet nyt liv i med en række interessante upublicerede artikler af Jamshidian i slutningen af 80`erne og senere generaliseret af Beaglehole og Tenney (1991). Dette analyserede jeg med udgangspunkt i Langetiegs (1980) model, for i den forbindelse at påvise, at Beaglehole og Tenneys (1991) "double decay" model fittede ind i dette framework, og at Langetiegs model var identisk med deres normalfordelte multi-faktor model. En interessant egenskab ved en sådan form for modellering er nemlig det forhold, at det er muligt at finde analytiske udtryk på en lang række fordringer, såsom optioner på obligationer i et multifaktor-framework.

En diskussion af de ikke-lineære rentestrukturmodeller, specielt med udgangspunkt i Longstaff (1989) og Constantinides (1992) blev også foretaget. Motivationen for disse modeller kan også forklares ved problemet med de lineære en-faktormodeller, da "twist" i rentestrukturen (selv i en-faktor versionerne) her er tilladt, pga ulineariteten. Den kvadratiske model fra Longstaff (1989) er blevet rettet og generaliseret af Beaglehole og Tenney (1991), (1992), og yderligere af Jamshidian (1993).

Litteraturliste

Abramowitz og Stegun (1970) "Handbook of Mathematical Functions with Formula, Graphs and Mathematical Tablesed", Washington United States Department of Commerce, National Bureau of Standards 1970

Au, Sim og Thurston (1995) "Empirical Tests of Markovian Representations of No Arbitrage-Based Term Structure Models", working paper University of New South Wales og Commonwealth Bank, februar 1995

Amin og Morton (1993) "Implied Volatility Functions in Arbitrage Free Term Structure Models", Working Paper University of Michigan, maj 1993

Arnold (1974) "Stochastic Differential Equations: Theory and Applications", John Wiley og Sons, New York

Astrup Jensen og Aase Nielsen (1989) "Optioner og deres 'Prisdannelse", Jurist-og Økonom forbundets forlag

Babbel (1988) "Interest Rate Dynamics and The Term Structure A Note", Journal of Banking and Finance 12, side 401-417

Babbs (1990) "The Term Structure of Interest Rates Stochastic Processes and Contingent Claims", Ph.d Dissertation, The Management School, Imperial College

Babbs (1993) "Generalized Vasicek models of the Term Structure", Working Paper Midland Global Markets 1993

Babbs og Webber (1995) "A Theory of the Term Structure with an Official Short Rate", working paper First National Bank of Chicago og University of Warwick, marts 1995

Babcock (1984) "Duration as a link between yield and value", Journal of Portfolio Mana gement efterår, side 58-65

Ball og Torous (1983) "Bond price dynamics and options", Journal of Financial and Quantitative Analysis 18, side 517-531

Barone, Cuoco og Zautnik (1991) "Term Structure Estimation using the Cox, Ingersoll and Ross Model: The Case of Italian Treasury Bonds", Journal of Fixed Income 1, side 87-95

Barrett, Heuson og Gosnell (1992) "Yield Curve Shifts: An Empirical Solution to a Theoretical Dilemma", Working Paper University of Miami oktober 1992

Baron (1989) "Time Variation in the Modes of Fluctutation of The Treasury Yield Curve", Bankers Trust, oktober 1989

Beaglehole og Tenney (1991) "General Solutions of some Interest Rate-Contingent Claim Pricing Equations", Journal of Fixed Income 3, side 69-83

Beaglehole og Tenney (1992) "Corrections and additions to "A nonlinear equilibrium model of the term structure of interest rates", Journal of Financial Economics 32, side 345-353

Beckers (1980) "The Constant Elasticity of Variance Model and Its Implications for Option Pricing", Journal of Finance vol 35, nr. 3, side 661-673

Bhar og Chiarella (1995 no. 53) "Transformation of Heath, Jarrow-Morton Models to Markovian Systems" working paper University of Technology, Sydney, december 1995

Bhar og Chiarella (1995 no. 54) "The Estimation of the Heath, Jarrow-Morton Model by use of Kalman Filtering Techniques", working paper University of Technology, Sydney, december 1995

Bierwag, Kaufmann og Toevs (1983) "Innovation in Bond Portfolio Management", JAI Press Inc

Bierwag (1987a) "Duration Analysis Managing Interest Rate Risk", Balling Publishing Company 1987

Bierwag (1987b) "Bond Returns, Discrete Stochastic Processes, and Duration", Journal of Financial Research 10, side 191-209

Bierwag, Kaufmann og Latta (1987) "Bond Portfolio Immunization: Tests of Maturity, One- and Two-Factor Duration Matching Strategies", Financial Review 22, side 203-219

Billingsley (1995) "Probability and Measure", 3. udgave John Wiley og Sons 1995

Black og Scholes (1973) "The pricing of Options and Corporate Liabilities", Journal of Political Economy, vol 81, side 637-654

Black (1976) "The pricing of Commodity Contracts", Journal of Financial Economics 3, nr. 1 og 2, jan/marts, side 167-179

Black, Derman og Toy (1990) "A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options", Financial Analyst Journal, januar-februar 1990, side 33-39

Bliss (1991) "Testing Term Structure Estimation Methods", Ph.D Dissertation University of

Chicago, december 1991
Bollerslev (1986) "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", Journal of Economtrics 31, side 307-327

Brace og Musiela (1994) "A Multifactor Gauss Markov Implementation of Heath, Jarrow and Morton", Mathematical Finance, vol. 4, no.3, side 259-283

Brennan og Schwartz (1979) "A Continuous Time Approach to The Pricing of Bonds", Journal of Banking and Finance 3, side 133-155

Brennan og Schwartz (1980) "Conditional Predictions of Bond Prices and Returns", Journal of Finance, vol 35, nr. 2, side 405-419

Brennan og Schwartz (1982) "An Equilibrium Model of Bond Pricing and a Test of Market Efficiency", Journal of Financial and Quantitative Analysis vol 17, nr. 3, side 301-329

Brenner (1989) "Three Essays on The Term Structure", Ph.D Dissertation Cornell University august 1989

Brown og Dybvig (1986) "The Empirical Implications of the Cox, Ingersoll, Ross Theory of the Term Structure of Interest Rates", Journal of Finance vol 41, nr. 3, side 617-632

Brown og Schaefer (1988) "Testing the Cox, Ingersoll og Ross Model on British Government Index-Linked Securities", Working Paper London Business School, juni 1988

Brown og Schaefer (1991) "Interest Rate Volatility and The Term Structure", Working Paper London Business School, juli 1991

Brown og Schaefer (1994) "The Term Structure of Real Interest Rates and the Cox, Ingersoll og Ross Model", Journal of Financial Economics 35, side 3-42

Broze, Scaillet og Zakoian (1995) "Testing for continuous models of the short-term interest rate", Journal of Empirical Finance 2 (1995), side 199-223

Buhler, Uhrig, Walter og Weber (1995) "An Empirical Comparison of Alternative Models vor Valuing Interest Rate Options", working paper Mannheim universitet, juni 1995

Campbell (1986) "A Defense of Traditional Hypothesis about the Term Structure of Interest Rates", Journal of Finance vol 41, nr. 1, side 183-193

Canabarro (1994) "Comparing the Dynamic Accuracy of Yield-Curve-Based Interest Rate Contingent Claim Pricing Models", The Journal of Financial Engineering, vol. 2, no. 4, side 365-401

Carleton og Cooper (1976) "Estimation and Uses of The Term Structure of Interest Rates", Journal of Finance vol 31, nr. 4, side 1067-1083

Caverhill (1994) "When is the Short Rate Markovian?", Mathematical Finance, Vol 4, no. 4, side 305-312

Caverhill og Strickland (1992) "Money Market Term Structure Dynamics and Volatility Expectations", Working Paper University of Warwick, juni 1992

Caverhill og Pang (1995) "Efficient and Flexible Bond Option Valuation in the Heath, Jarrow and Morton Framework", working paper FORC februar 1995

Chambers, Carleton og Waldman (1984) "A New Approach to Estimation of the Term Structure of Interest Rates", Journal of Financial and Quantitative Analysis vol 19, side 233-252

Chambers og Carleton (1988) "A Generalized Approach to Duration", Research in Finance, vol 7, side 163-181

Chambers, Carleton og Mcenally (1988) "Immunizing Default-Free Bond Portfolios with a Duration Vector", Journal of Financial and Quantitative Analysis , side 89-104

Chan, Karolyi, Longstaff og Sanders (1992a) "An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Models" , Journal of Finance vol 47, nr. 3, side 1209-1227

Chan, Karolyi, Longstaff og Sanders (1992b) "The Volatility of Japanese Interest Rates: A Comparison of Alternative Term Structure Models" , Pacific-Basin Capital Markets Research, vol 2, side 119-136

Chen (1994) "A Stochastic Mean and Stochastic Volatility: A Three-Factor Model of the Term Structure and its Application in Pricing of Interest Rate Derivatives", Working paper Federal Reserve Board, oktober 1994

Chen og Scott (1993) "Maximum Likelihood Estimation for a Multifactor Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rates", Journal of Fixed Income vol 3, nr. 3, side 14-32

Cheng (1991) "On the Feasibility of Arbitrage-Based Option Pricing When Stoschatic Bond Price Processes Are Involved", Journal of Economic Theory 53, side 185-198

Clewlow (1992) "Finite Difference Techniques for One and Two Dimension Option Valuation Problems", working paper Warwick University, november 1992, FORC Preprint 90/10

Constantinides (1992) "A Theory of the Nominal Term Structure of Interest Rates", The Review of Financial Studies 5, side 531 - 552
Courtadon (1982) "The Pricing of Options on Default-Free-Bonds", Journal of Financial and Quantitative Analysis nr 17, side 75-100

Cox, Ingersoll og Ross (1981) "A Re-examination of Traditional Hypotheses about the Term Structure of Interest Rates", Journal of Finance 36, side 769-799

Cox, Ingersoll og Ross (1985) "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", Econometrica 53, side 363-385

Cox og Ross (1976) "The Valuation of options for Alternative Stochastic Processes", Journal of Financial Economics 3, side 145-166

Cox, Ross og Rubenstein (1979) "Option Pricing: A simplified Approach", Journal of Financial Economics 7, 1979, side 229-263

Dahl (1989) "Variationer i rentestrukturen og styring af renterisiko", Finans Invest februar 1989

Dahl (1994) "Danish Mortgage - III, Mortgage Modeling", Fixed Income Focus, 20. oktober 1994, Alfred Berg

Dahl (1995) "A Dynamic Three Factor Model of the Term Structure", arbejdspapir Alfred Berg 28. august 1995

Dattatrey (1991) "Fixed Income Analytics", Probus Publishing Company 1991

Dietrich-Campbell og Schwartz (1986) "Valuing Debt Options: Empirical Evidence", Journal of Financial Economics 16, side 321-343

Dothan (1978) "On The Term Structure of Interest Rates", Journal of Financial Economics 6, side 59-69

Dothan (1990) "Prices in Financial Markets", Oxford University Press

Duffie (1992) "Dynamic Asset Pricing Theory", Princeton University Press

Duffie og Kan (1993) "A Yield-Factor Model of Interest Rates", Working Paper Stanford University

Dupire (1993) "Arbitrage Pricing with Stochastic Volatility", working paper Banque Paribas, maj 1993

Dupire (1995) "A Unified Theory of Volatility", working paper Banque Paribas, maj 1995.

Elton, Gruber og Nabar (1988) "Bond Returns, Immunization and The Return Generating Process", Studies in Banking and Finance 5, side 125-154

Engle (1982) "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation", Econometrica vol 50, nr. 4, side 987-1007

Engle (1993) "Econometric Models of Financial Data", Paper presented at the European Meeting Econometric Society, Uppsale Sweden, august 1993

Fama og Bliss (1987) "The Information in Long-Maturity Forward Rates", American Economic Review 77, side 299-335

Feller (1951) "Two Singular Diffusion Problems", Annals of Mathematics vol 54, nr. 1, side 173-182

Fischer og Zechner (1984) "Diffusion Process Specifikaitons for Interest Rates", Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol 227, side 64-73

Flesaker (1990a) "A Three Factor Model of Term Structure Dynamics: Theory and Empirical Implications", Working Paper University of Illinois

Flesaker (1990b) "Arbitrage Free Pricing of Interest Rate Futures and Forward Contracts", Working Paper University of Illinois

Flesaker (1992) "Estimation and Testing of the Constant Volatility Heath, Jarrow, Morton Model of Interest Rate Contingent Claims Pricing", Working Paper University of Illinois, januar 1992

Frachot "Factor Models of Domestic and Foreign Interest Rates with Stochastic Volatilities", working paper Banque de France, 24. december 1993

Garbade (1986) "Modes of Fluctuations in Bonds Yields - an Analysis of Principal Components", Bankers Trust, Money Market juni

Garbade (1989) "Polynomial Representations of The Yield Curve and its Modes of Fluctation", Bankers Trust juli 1989

Geman, Karoui og Rochet (1993) "Changes of Numeraire, Changes of Probability Measure and Option Pricing", Working Paper University of Paris IV

Gibbons og Ramaswany (1992) "A Test of The Cox, Ingersoll og Ross Model of Term

Structure", Working Paper The Wharton School of the University of Pennsylvania 1992

Goldfeld og Quandt (1972) "Nonlinear Methods in Econometrics", Amsterdam: North-Holland 1971

Greene (1993) "Econometric Analysis", 2nd Edition, Macmillan Publishing Company 1993

Hall (1991) "An Introduction to Generalized Method of Moments Estimation", Working Paper North Carolina State University november 1991

Hansen (1982) "Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators", Econometrica vol 50, nr. 4, side 1029-1054

Harrison og Kreps (1979) "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets", Journal of Economic Theory 20, side 381-408

Harman (1967) "Modern Factor Analysis", University of Chicago Press 1966

Harvey (1990) "The Econometric Analysis of Time Series" Philip Allan Publishing Company 1990

Harvey (1992) "Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter", Cambridge University Press 1992

Heath, Jarrow og Morton (1987) "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A new Methodology", Working Paper Cornell University oktober 1987

Heath, Jarrow og Morton (1990) "Contingent Claim Valuation with a Random Evolution of Interest Rates", The Review of Futures Markets 9, side 54-76

Heath, Jarrow og Morton (1991) "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A new Methodology for Contingent Claim Valuation", Working Paper Cornell University

Heitmann of Trautmann (1995) "Gaussian Multi-factor Interest Rate Models: Theory, Estimation, and Implications for Option Pricing", working paper Johannes Gutenberg-University Mainz juni 1995

Heston (1992) "Testing Continuous Time Models of The Term Structure of Interest Rates", Working Paper Yale School of Organization and Management, juni 1992

Ho og Lee (1986) "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims", Journal of Finance vol 41, nr. 5, side 1011-1029

Hogan (1993) "Problems in certain two-factor term structure models", The Annals of Applied Probability 1993, vol. 3, nr. 2, side 576-581

Hull (1993) "Options, Futures, and other derivative securities", 2. udgave Prentice-Hall Internatial

Hull og White (1990a) "Valuing Derivative Securities Using the Eksplicit Finite Difference Method", Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 25, no. 1, marts 1990, side 87-99

Hull og White (1990b) "Pricing Interest-Rate-Derivative Securities", The Review of Financial Studies 3, side 573-592

Hull og White (1993) "One-Factor Interest Rate Model and the Valuation of Interest Rate Derivative Securities", Journal of Financial and Quantitative Analysis 28, 1993, side 235-254

Hull og White (1994) "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models", Working paper University of Toronto, januar 1994

Hull og White (1995) "The impact of default risk on the prices of options and other derivative securities", The Journal of Banking and Finance, side 299-322

Ingersoll, Skelton og Weil (1978) "Duration forty years later", Journal of Financial and Quantitative Analysis, november, side 627-652

Jacobsen (1992) "Prepayment and the Valuation of Danish Mortgage-Backed Bonds", Ph.D afhandling september 1992, Handelshøjskolen i Århus.

Jacobsen og Tanggaard (1986a) "En statistisk model til vurdering af danske obligationer", Upubliceret working paper, Handelshøjskolen i Århus 1986

Jacobsen og Tanggaard (1986b) "Introduktion til estimation og anvendelse af nul-kupon-rentestrukturer", Upubliceret working paper, Handelshøjskolen i Århus, juli 1986

Jacobsen og Tanggaard (1988a) "Estimating the term structure of interest rates using cubic splines", Upubliceret working paper, Handelshøjskolen i Århus september 1988

Jacobsen og Tanggaard (1988b) "The estimation of long and short term interest rates", Upubliceret working paper, Handelshøjskolen i Århus november 1988

Jamshidian (1987) "Pricing of Contingent Claims in The One-Factor Term Structure Model",

Working Paper Merrill Lynch, Trading Analysis Group, juli 1987

Jamshidian (1989) "An exact Bond Option Formula", Journal of Finance 44, side 205-209

Jamshidian (1990) "Bond and Option Evaluation in the Gaussian Interest Rate Model", Working Paper, Merrrill Lynch

Jamshidian (1991a) "The Preference-Free Determination of Bond and Option Prices from The Spot Rate", Advances in Futures and Options Research 4, side 51-67

Jamshidian (1991b) "Forward Induction and Construction of Yield Curve Diffusion Models", Journal of Fixed Income, juni 1991, side 62-74

Jamshidian (1993a) "A Simple Class of Square-Root Interest Rate Models",Working Paper Fuji International Finance, januar 1993

Jamshidian (1993b) "Bond, Futures and Option Evaluation in the Quadratic Interest Rate Model", Working Paper Fuji International Finance, marts 1993

Jarrow og Turnbull (1995) "Pricing options on financial securities subject to credit risk", The Journal of Finance, side 53-85

Jarrow, Lando og Turnbull (1995) "A markov model of the term structure of credit risk spreads", working paper, Cornell University

Jeffrey (1995) "An Empirical test of Single Factor Heath, Jarrow-Morton Term Structure Models", working paper University of New South Wales, februar 1995

Johnson og Kotz (1970) "Continuous univariate distributions -2 ", Houghton Mifflin Company Boston

Jørgensen (1994) "American Option Pricing", Pd.D Dissertation Handelshøjskolen i Århus, 21. marts 1994

Kijima og Nagayama (1995) "Efficient Numerical Procedures for the Hull-White Extended Vasicek Model", The Journal of Financial Engineering, vol. 3, no. 3/4, 1995, side 275-292

Karatzas og Shreve (1988) "Brownian Motion and Stochastic Calculus", New York, Springer Verlag

Karlin og Taylor (1981) "A second course in Stochastic Processes", Academic Press 1981

Karoui og Lacoste (1992) "Multifactor Models of the term structure of interest rates", Working Paper University of Paris

Karoui, Myneni og Viswanathan (1993) "Arbitrage pricing and hedging of interest rate claims with state variables", Working Paper, University if Paris IV

Karoui og Geman (1994) "A Probabilistic Approach to the Valutaion of General Floating Rate Notes with an Application to Interest Rate Swaps", udkommer i Advances in Options and Futures Research 1994
Kenndey (1994) "The Term Structure of Interest Rates as a Gaussian Random Field", Mathemartical Finance, vol. 4, no. 3, side 247-258

Kraus og Smith (1993) "A Simple Multifactor Term Structure Model", Journal of Fixed Income vol 3, nr. 1, side 19-24

Lando (1995) "Modeling bonds and derivatives with default risk", working paper Københavns Universitet, Matematisk institut, 22. november 1995

Langetieg (1980) "A Multivariate Model of the Term Structure", Journal of Finance 35, side 71-97

Langetieg og Smoot (1981) "An appraisal of alternative spline methodologies for estimating the term structure of interest rates",Upubliceret working paper, University of Southern California december 1981

Litterman og Scheinkman (1988) "Common factors affecting Bond Returns", Goldmann, Sachs & Co, Financial Strategies Group, September 1988

Lloyd (1980) "Probability", John Wiley & Sons New York

Longstaff (1989) "A non-linear general equilibrium model of the term structure of interest rates", Journal of Financial Economics 23, side 195-224

Longstaff (1992) "Multiple equilibria and term structure models", Journal of Financial Economics 32, side 333-344

Longstaff og Schwartz (1991) "Interest-rate volatility and the term structure: A two-factor general equilibrium model", Working Paper Ohio State University november 1990

Longstaff og Schwartz (1992) "A Two-Factor Interest Rate Model and Contingent Claims Valuation", Journal of Fixed Income, vol 2, nr. 2, side 16-23

Longstaff og Schwartz (1993) "Implementation of the Longstaff-Schwartz Interest Rate

Model", Journal of Fixed Income 3, side 7-14

Lund (1993) "Dynamic Term Structure Models", Hovedopgave Handelshøjskolen i Arhus, sommeren 1993

Lund (1994) "Econometric Analysis of Continuous-Time Arbitrage-Free Model of The Term Structure of Interest Rates", arbejdspapir Handelshøjskolen i Arhus, december 1994

Madsen (1991a) "Porteføljebetragtninger i en deterministisk verden", upubliceret arbejdspapir Realkredit Danmark, foråret 1991
Madsen (1991b) "En Sammenligning af alternative rentestruktur parameteriseringer", upubliceret arbejdspapir Realkredit Danmark, vinteren 1991

Madsen (1994a) "Rentestrukturen og forventningshypoteserne; en betragtning under usikkerhed", arbejdspapir Realkredit Danmark 11. januar 1994

Madsen (1994b) "Hedging med Obligations-Optioner", arbejdspapir Realkredit Danmark, 11.august 1994

Madsen (1995) "Konverterbare Obligationer II - Prisfastsættelse og Prepayment Modellering", arbejdspapir Realkredit Danmark 25. august 1995

Madsen, Kaj (1984) "Optimering", Danmarks Tekniske Højskole, Numerisk Institut hæfte 38

Marsh og Rosenfeld (1983) "Stochastic Processes for Interest Rates and Equilibrium Bond Prices", Journal of Finance vol 38, nr. 2, side 635-650

McCulloch (1975) "The Tax-Adjusted Yield Curve", Journal of Finance vol 30, side 811-830

Merton (1973) "Theory of Rationel option Pricing", Bell Journal of Economics and Management Science 4, nr. 1, side 141-183

Miltersen (1993) "An Empirical Study of the Term Structure of Interest Rates", Working Paper no 7 1992, Institut for Virksomhedsledelse, Odense Universitet

Miron og Swannell (1991) "Pricing and Hedging Swaps", Euromoney Books 1991

Moler og Stewart (1973) "An Algorithm for Generalized Matrix Egenvalue Problems", SIAM Journal of Numerical Analysis 10, side 241-256

Morton (1988) "Arbitrage and Martingales", Ph.d. Dissertation Cornell University

Musiela, Turnbull og Wakeman (1993) "Interest Rate Risk Management", working paper New South Wales Universitet, Queens Universitet og MTK Global Capital

Nawalkha (1995) "Face value convergence for stochastic bond price processes: a note in Merton's partial equilibrium option pricing model", Journal of Banking and Finance 19 1995, side 153-164

Nelson og Ramaswany (1990) "Simple Binomial Processes as Diffusion Approximations in Financial Models", The Review of Financial Studies vol. 3, no. 3, 1990, side 393-430

Nelson og Siegel (1987) "Parsimonious modelling of Yield Curves", Journal of Business oktober, side 473-489
Nelson og Siegel (1988) "Long-term behavior of yield curves", The Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 23, no. 1, marts 1988, side 105-110

Newey og West (1987) "Hypothesis Testing with Efficient Method of Moments Estimation", International Economic Review vol 28, nr. 3, side 777-787

Numerisk Institut (1972) "Løsning af Lineære Ligningssystemer", Hæfte 23 Numerisk Institut Danmarks Tekniske Højskole

Pelsser (1995) "An empirical comparison of one-factor yield-curve models", working paper ABN-Amro Bank, 17. juli 1995

Phillips (1972) "The Structural Estimation of a Stochastic Differential Equation System", Econometrica 40, side 1021-1041

Prisman og Shores (1988) "Duration Measures for Specific Term Structure Estimations and Applications to Bond Portfolio Immunization", Journal of Banking and Finance12, side 493-504

Rady og Sandmann (1994) "The direct approach to Debt Option pricing", The Review of Futures Markets 13(2), side 461-514

Rebonato og Cooper (1995) "The limitations of simple two-factor Interest Rate Models", working paper London Business School, IFA WP-200-1995

Reitano (1992) "Non-Parallel Yield Curve Shifts and Immunization", Journal of Portfolio Management foråret, side 36-43

Ritchken og Sankarasubramanian (1995) "Volatility Structures of Forward Rates and The Dynamics of The Term Structure", Mathematical Finance, Vol 5, no. 1, side 55-72

Rogers (1993) "Which Model for Term-Structure of Interest Rates should one use?", arbejdspapir Bath Universitet juni 1993

Rogers og Stummer (1994) "How well do one-factor models fit bond prices?", working paper University of Bath, oktober 1994

Ross (1976) "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing", Journal of Economic Theory 13, side 341-360

Rubenstein (1984) "A Simple Formula for the Expected Rate of Return of an Option over a Finite Holding Period", Journal of Finance vol. 39, side 1503-1509

Schaefer (1981) "Measuring a Tax-Specific Term Structure of Interest Rates in The Market for British Government Securities", The Economic Journal 91, side 415-438

Schwartz og Schaefer (1984) "A Two-Factor model of the Term Structure of Interest Rates: An Approximate Analytical Solution", Journal of Financial and Quantitative Analysis 19, side 413-424

Schwartz og Schaefer (1987) "Time-Dependent Variance and the Pricing of Bond Options", Journal of Finance vol 42, nr. 5, side 1113-1128.

Shea (1984) "Pitfalls in smoothing interest rate term structure data: equilibrium models and spline approximations", The Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 19, no. 3, september 1984, side 253-269

Stambaugh (1988) "The Information in Forward Rates implications for Models of The Term Structure", Journal of Financial Economics 21, side 41-70

Steeley (1990) "Modelling the Dynamics of the Term Structure of Interest Rates", The Economic amd Social Review, vol 21, no 4, side 337-361

Stoer og Bulirsch (1993) "An introduction to Numerical Analysis", Texts in Applied Mathematics 12, 2. udgave Springer Verlag 1993

Sørensen (1994) "Option Pricing in a Gaussian Two-Factor Model of the Term Structure of Interest Rates, WP 94-4 Handelshøjskolen i København, Institut for Finansiering

Tanggaard (1991) "En model for obligationsporteføljevalg", Working Paper Handelshøjskolen i Århus, januar 1991

Trzcinka (1986) "On the Number of Factors in the Arbitrage Pricing Model", Journal of Finance vol XLI, side 347-368

Uhrig og Walter (1994) "Term Structure of Interest Rates, Consistent Risk Attitudes, and reference-Free Option Prices", Working Paper University of Mannheim juli 1994

Uhrig og Walter (1995) "A new numerical Approach for Fitting the Initial Yield Curve", working paper University of Mannheim

Vasicek (1977) "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", Journal of Financial Economics 5, side 177-188

Vasicek og Fong (1991) "Interest Rate Volatility as a Stochastic Factor", Working Paper Gifford Fong Associates februar 1991

Yacine Ait-Sahalia (1995) "Testing Continuous-Time Models of The Spot Interest Rate", upubliceret Working Paper University of Chicago

Zheng (1993) "Testing Term Structure Models of Interest Rates with Unspecified Dynamic Factors", upubliceret Working Paper First National Bank of Chicago, december 1993

Appendix A

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

Black og Scholes forudsætter, at aktieprisen S følger en Ito-proces af Wienertypen, således:
Hvis nu C er prisen på det afledte instrument, som er afhængig af S, må dette medføre, at C er

$$dC(t) = \left[\frac{\delta C}{\delta t} + \frac{\delta C}{\delta S}\mu S + \frac{1}{2deltaS^2}\sigma^2 C \sigma^2 S^2\right]dt + \frac{\delta C}{\delta S}\sigma S dW$$

en funktion af S og t. Det følger herefter, at følgende udtryk derfor må gælde:
Endvidere gælder det, at ved at vælge en passende portefølje af aktier og dens afledte instrument, kan Wiener processen blive elimineret.

$$\text{antal} \quad C = -1$$
$$\text{antal} \quad S = +\frac{\delta C}{\delta S}$$

Betragt nu følgende portefølje:

$$P = -C + S\frac{\delta C}{\delta S}$$

Dette betyder, at den totale portefølje P vil have følgende værdi:
Ændringen i denne porteføljes værdi er givet ved summen af ændringerne i porteføljens

$$dP = -dC + dS\frac{\delta C}{\delta S}$$

enkelte instrumenter således:
Ved indsættelse af formel 139 og 140 i formel 143 fås følgende udtryk for porteføljens totale følsomhed:

$$dP = -\left[\frac{\delta C}{\delta t} + \frac{\delta C}{\delta S}\mu S + \frac{1}{2deltaS^2}\frac{\delta^2 C}{}\sigma^2 S^2\right]dt$$
$$-\frac{\delta C}{\delta S}\sigma S dW + (\mu S dt + \sigma S dW)\frac{\delta C}{\delta S}$$
$$\Rightarrow \quad dP = -\left[\frac{\delta C}{\delta t} + \frac{1\delta^2 C}{2\delta S^2}\sigma^2 S^2\right]dt$$

Da udtrykket ikke indeholder det stokastiske led dW, er denne portefølje at betragte som risikofri over intervallet dt. Dette indebærer, at porteføljen må have et afkast lig den risikofri

$$-\left[\frac{\delta C}{\delta t} + \frac{1\delta^2 C}{2\delta S^2}\sigma^2 S^2\right]dt = r\left[-C + S\frac{\delta C}{\delta S}\right]dt$$
$$\Rightarrow \quad -\frac{\delta C}{\delta t}dt - \frac{1\delta^2 C}{2\delta S^2}\sigma^2 S^2 dt = -rCdt + rS\frac{\delta C}{\delta S}dt$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\delta C}{\delta t} + rS\frac{\delta C}{\delta S} + \frac{1\delta^2 C}{2\delta S^2}\sigma^2 S^2 = rC$$

rente således:
som er den traditionelle Black og Scholes (1973) ligning.

Denne ligning har mange løsninger alt afhængig af, hvilken afledt fordring der betragtes. Den bestemte afledte fordrings pris, som findes ved at løse ovenstående formel, afhænger af,

$$C = \max[S - E;0]$$

hvilken randbetingelse der vælges. For en europæisk call-option er randbetingelsen:

$$P = \max[E - S;0]$$

og for en europæisk put option:
hvor E er exerciseprisen.

Til slut skal lige pointeres, at porteføljen P kun er risikofri for uendelige korte tidsperioder, pga driften i delta. Dette medfører i princippet, at der skal ske en kontinuerlig tilpasning af porteføljen.

I Madsen (1991) blev nøgletal for optioner udledt med udgangspunkt i Black 76 modellen. Her vil jeg anvise den partielle differentialligning, som blev udledt af Black i 1976.

$$F = Se^{rt}$$

Forholdet mellem spotprisen og forwardprisen er defineret ved følgende sammenhæng: Endvidere antages det, at S følger en Ito-proces i henhold til formel 139. Det spørgsmål, der nu klart stiller sig, er, hvordan er sammenhængen imellem spotinstrumentets og forwardinstru-mentets volatilitet?

$$\sigma_F = \sigma\frac{\delta F}{\delta S} = \sigma e^{rt} = \sigma$$

Det følger fra Itos lemma, at forwardprisens volatilitet σ_F er givet ved:

Altså er S' volatilitet ækvivalent med F's volatilitet. Dette resultat er dog kun validt, hvis følgende betingelser er opfyldt:

1) Den risikofri rente r er kun en funktion af tiden.

2) Volatiliteten på spotinstrumentet S er konstant.

$$dF = \mu_F F dt + \sigma F dW$$

Hvis nu også F antages at følge en Ito-proces af Wienertypen, fås:

$$\frac{\delta C}{\delta t} + \frac{1\delta^2 C}{2\delta F^2}\sigma^2 F^2 = rC$$

Den endelige partielle differentialligning bliver herved af formen:
Dette udtryk er den traditionelle ligning, som blev udledt af Black i 1976.

Ved at betragte formel 151 ses det tydeligt, at leddet $rF\delta C/\delta F$ er faldet bort. Forklaringen på dette er, at der ingen initialinvestering er ved at indgå en forwardkontrakt. Dette medfører

$$P = -C$$

nemlig, at formel 142 får følgende udseende:
Hvor dette er baggrunden for, at det ovenfor nævnte led udgår i formel 151.

Endnu et interessant forhold kan observeres ved at betragte formel 151. Den har samme form som den endelige partielle differentialligning udledt af Merton (1973) i forbindelse med prisfastsættelse af optioner på aktier som kontinuert betaler dividende, hvis denne dividende er lig den risikofri rente. Det kan altså konkluderes, at en forwardpris er at betragte som et spotaktiv, der betaler en kontinuerlig dividende lig den risikofri rente ved prisfastsættelse af afledte instrumenter.

Den partielle differentialligning, givet ved formel 145, løser Black og Scholes ved at foretage en transformation indtil "the heat-equation" for herved at finde løsningen.

En mere elegant metode er blevet foreslået af Cox og Ross (1976).

For det første, ligegyldigt hvad løsningen er til formel 145, vil den kun være en funktion af variablene i formlerne 145,146 og 147, nemlig r,S,t,E,σ^2. For det andet, i udformning af den risikofri hedge, var den eneste antagelse omkring de enkelte markedsdeltageres præferencer, at 2 fordringer, som er perfekte substitutter, må have det samme afkast. Der blev ikke indført nogen antagelser omkring risiko. Dette indikerer, at hvis der eksisterer en løsning, som antager en eller anden form for præferencestruktur, må dette være løsningen til den pågældende PDE for enhver præferencestruktur. Dette indikerer, at man skal anvende den præferencestruktur, som er bedst i matematisk forstand, dvs. nemmest at behandle.

For at anvende denne løsningsteknik antages nu, at markedsdeltagerne er risikoneutrale. I det tilfælde vil ligevægtsafkastet være lig den risikofri rente r. Dette betyder, at optionens værdi må være givet ved den diskonterede værdi af dens forventede værdi på udløbstidspunktet,

$$C = e^{-rt}E_0[\max(0, S_t - E)]$$

således[68]:
Her E_o er forventningsoperatoren på tidspunkt 0.

$$C = e^{-rt}\int_E^{\infty}(S_t - E)\,h(S_t)\,dS_t$$

Løsningen til formel 153 kan skrives således:
Hvor $h(S_t)$ er sandsynlighedsfordelingen for aktieprisen på tidspunkt t, betinget af den aktuelle pris S.

$$C = e^{-rt}\int_{\frac{E}{S}}^{\infty}(SR - E)\,h(R)\,dR$$

Formel 154 kan omskrives til:
Her er $R = S_t/S$ en lognormalfordelt variabel med en forventet værdi $E(R) = e^{rt}$, og h(.) er dennes tæthedsfunktion.

$$C = e^{-rt}\int_{\ln\left(\frac{E}{S}\right)}^{\infty}(Se^u - E)\,h(u)\,du$$

Foretag nu en variabel ændring således:

[68] Her vil jeg kun betragte en call-option, da løsningsprincipperne for call-og put-optioner er identiske.

Hvor h(u) er den normalfordelte tæthedsfunktion med en middelværdi lig ut = rt - $0.5\sigma^2$t, og en varians = σ^2t.

Det er måske ikke helt indlysende, hvorfor ut er defineret som ovenfor, så lad mig for god ordens skyld gennemgå argumentet.
Denne variabel ændring fremkommer ved, givet processen fra formel 139, at man ønsker at

$$dlnS = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW$$

finde processen dlnS. Dette kan nemlig vises[69] at resultere i en proces af følgende form: Hvorved validiteten af det ovenstående kan indses.

$$C = e^{-rt} \int_{\frac{\ln\left(\frac{E}{S}\right)}{\sigma\sqrt{t}} + \sigma\sqrt{t}}^{\infty} \left(Se^{rt - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma\sqrt{t}z} - E\right) h(z)\,dz$$

Der foretages nu endnu en variabel ændring således:

$$h(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

Her er h(z) den standardiserede normalfordelings tæthedsfunktion, dvs:

$$C = Se^{-rt} \int_{\frac{\ln\left(\frac{E}{S}\right)}{\sigma\sqrt{t}} + \sigma\sqrt{t}}^{\infty} e^{rt - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma\sqrt{t}z} h(z)\,dz$$

$$- Ee^{-rt} \int_{\frac{\ln\left(\frac{E}{S}\right)}{\sigma\sqrt{t}} + \sigma\sqrt{t}}^{\infty} h(z)\,dz$$

Herefter foretages en opsplitning af integralet i formel 158:

$$e^{\ln\left(\frac{Ee^{-rt}}{S}\right)} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln\left(\frac{Ee^{-rt}}{S}\right)}{\sigma\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t}\right]^2} = e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln\left(\frac{Ee^{-rt}}{S}\right)}{\sigma\sqrt{t}} - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t}\right]^2}$$

Gang nu e^{rt} bort, og ved samtidig at indse, at følgende relation er gældende:

[69] Se Madsen (1994a) for den reelle udledning.

$$C = S \int_{\frac{\ln\left(\frac{Ee^{-rt}}{S}\right)}{\sigma\sqrt{t}} - \sigma\sqrt{t}}^{\infty} h(z)\,dz$$

$$- Ee^{-rt} \int_{\frac{\ln\left(\frac{Ee^{-rt}}{S}\right)}{\sigma\sqrt{t}} + \sigma\sqrt{t}}^{\infty} h(z)\,dz$$

fås følgende resultat:

$$C = SN(d_1) - Ee^{-rt}N(d_1 - \sigma\sqrt{t})$$

hvor

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{Ee^{-rt}}\right)}{\sigma\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t}$$

Dette kan nemt indses at være ækvivalent med Black og Scholes (1973) model, nemlig:
Med udgangspunkt i den ovenfor foretagne udledning af Black og Scholes modellen er det elementært at foretage den selv samme udledning af den såkaldte Black 76 model.

Den eneste forskel kommer reelt set kun af formuleringen i formel 155, så lad mig genkalde

$$C = e^{-rt}\int_{\frac{E}{F}}^{\infty} (FR - E)\,h(R)\,dR$$

dette udtryk:
Her er h(R) = S_t/F. F er den i initialtidspunktet forventede spotpris på tidspunkt t og S_t er den aktuelle spotpris på tidspunkt t. Herudfra kan det udledes, at denne lognormalfordelte variabel har en forventet værdi på 0. Ved at anvende denne antagelse i den ovenfor foretagne

$$C = e^{-rt}[FN(d_1) - EN(d_1 - \sigma\sqrt{t})]$$

hvor

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F}{E}\right)}{\sigma\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t}$$

argumentation, finder man det analytiske udtryk for Black 76 modellen, nemlig:

Appendix B

Jeg vil starte med at gennemgå Schaefer og Schwartz' model for derefter at beskrive Ball og Torous` model.

Schaefer og Schwartz:

Ideen bag deres model bygger bl.a. på nogle betragtninger omkring egenskaberne ved Ball og Torous` model, som de formulerer således:

> *"Ball and Torous have proposed a model for the valuation of European options on discount bonds based on the assumption that the rate of return on the underlying discount bond follows a Brownian bridge process. This ingenious idea allows the bond price to converge to its face value at maturity but does so in such a way that the variance of the rate of return on the bond is constant over time. This allows Ball and Torous to use Mertons stochastic interest rate option model to derive a closed-form solution for the option value. A significant weakness of this approach, however, is that a constant variance of return implies that the variability of the yield to maturity increases without bound as the bond approaches maturity."*

I modsætning hertil opstiller de en geometrisk Brownsk bevægelse for obligationsprisen, hvor de antager, at spredningen i obligationsprisen er proportional i forhold til obligationens varighed.

Den basale grund til at vælge varigheden er, at begrebet har vist sig at være en rimelig effektiv metode til obligations-porteføljestyring. Flere empiriske undersøgelser viser, på trods af varighedsbegrebets temmelig restriktive antagelser[70], at det er et relativt godt mål for en obligations prisfølsomhed[71].

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = \mu_p dt + \sigma_P dW$$

hvor

$$\sigma_P = kP(t,T)^{\alpha-1} D_M$$

Den stokastiske proces for obligationer formuleres herefter således:
Hvor D_M er den modificeret varighed, som bekendt er defineret som den første afledte af

[70] Se Madsen (1991), hvor varighedsbegrebet samt dens begrænsninger nærmere er analyseret.

[71] Se Brennan og Schwartz, Nelson og Schaefer og Ingersoll i Bierwag, Kaufman og Toevs artikelsamling fra 1983, "Innovations in Bond Portfolio Management".

obligationsprisudtrykket med hensyn til renten normeret i forhold til prisen. Endvidere er k og α konstanter.
Ved at betragte den antagede funktionelle form for σ_P ses det, at $kP(t,T)^{\alpha-1}$ må være et udtryk for spredningen på ændringer i den effektive rente.

$$P(t,T) = P(y,t,T)$$

Dette kan forstås ved at anvende Itos lemma på følgende udtryk:

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = \frac{1}{P(t,T)}\frac{\delta P(t,T)}{\delta y}\sigma_y$$

Dette vil resultere i følgende udtryk for den lokale variation i den procentvise prisændring[72]:
Herudfra kan det indses, at spredningen på ændringer i den effektive rente kan ses at være

$$\sigma_y = kP(t,T)^{\alpha-1}$$

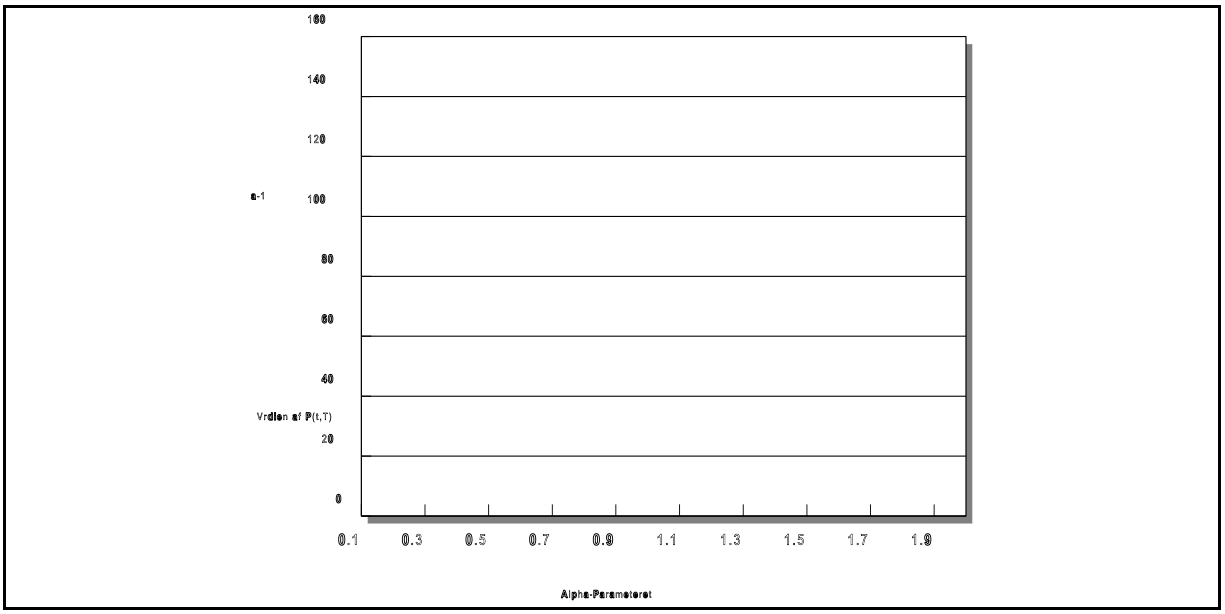
defineret som:
Ved at betragte formel 169 ses det tydeligt, at forskellige værdier af α og et givet prisniveau P(t,T) vil have forskellige indvirkninger på spredningen på ændringer i den effektive rente, og dermed på spredningen i obligationsprisen.

Det kan altså udledes, at i modsætning til Black og Scholes formel, hvor spredningen er uafhængig af prisen, afhænger spredningen her af prisen.

Det er endvidere muligt at se, at for α=1 vil spredningen være givet ved k gange den modificerede varighed, for α=0 ved k gange den modificerede varighed normeret i forhold til prisen og for α=2 ved k gange kursrisikoen.

Det kan ud fra disse betragtninger indses, at $P(t,T)^{\alpha-1}$ er utrolig følsom over for ændringer i α. Derfor er der i nedenstående figur vist, hvorledes dette udtryk bevæger sig for P(t,T) = 50, 100, 150 og for $0 \leq \alpha \leq 2$:

[72] Ved lokalt, menes ved marginale ændringer i den effektive rente y. Her vil en førsteordens ekspansion af den procentvise prisændring nemlig være at betragte som en udmærket approksimation.



Ud fra figuren kan bl.a. ses, at spredningen i den absolutte prisændring kan være invers relateret til prisændringer, hvis $\alpha >> 0$.

Den fundamentale partielle differentialligning kan nu udledes på normal vis, hvilket vil resultere i et udtryk, som er af samme form som Black og Scholes udtryk.

Den her opstillede model har dog 2 umiddelbare skavanker, nemlig:

1: Der er ingen garanti for, at obligationsprisen vil konvergere imod den påtrykte værdi, og

2: der er ingen analytisk løsning til den resulterende partielle differentialligning.

Derfor vil jeg nu opstille en model, som ikke har disse problemer, og samtidig introducere nogle andre uheldige egenskaber. Den model jeg her tænker på er selvfølgelig Ball og Touros´ (1983) model.

Ball og Touros

$$HP(t,T) = \ln\left[\frac{P(t,T)}{P(0,T)}\right]$$

Ball og Touros opstiller følgende udtryk for det logaritmiske t-periode afkast (HPR[73]):

[73] Hvor HPR betyder "Holding-period-return".

Hvorom det gælder, at HP(0,T) = 0, og HP(T,T) = -lnP(0,T). Endvidere må det pr. definition gælde, at P(T,T) = 1.

Dette udtryk måler afkastet ved at investere i en T-periode nulkuponobligation over t-perioder. Et alternativt afkastmål er et udtryk for det afkast, som ville blive opnået, hvis den betragtede

$$\mu(T) = -\frac{\ln P(0,T)}{T}$$

obligation blev beholdt til udløb. Dette kan skrives således:
som netop er et udtryk for den effektive rente.

Det kan ud fra ovenstående udtryk konkluderes, at en nulkuponobligations deterministiske afkast vil andrage μ(T)t efter t-perioder.

Ved anvendelse af formel 170 og 171 er det nu muligt at opstille et generelt udtryk for afkastet

$$\eta(t,T) = HP(t,T) - \mu(T)t$$

over en given tidshorisont t, således:
η(t,T) repræsenterer det log t-periode mer-afkast på en T-periode nulkuponobligation.

$$HP(t,T) = \mu(T)t + \eta(t,T)$$

Dette udtryk kan omskrives til:
Dette viser, at log t-periodeafkastet er givet ved en deterministisk del μ(T)t og en stokatisk del η(t,T), hvor η(0,T) = 0, og η(T,T) = 0, dvs. at det stokastiske led er "hængt" op i begge ender. For at gøre denne relation operationel kræver det, at den stokastiske proces η(t,T) bliver

$$\eta(0,T) = 0$$
og
$$\eta(T,T) = 0$$

defineret, hvor der selvfølgelig skal tænkes på, at følgende to betingelser skal være opfyldt:
En stokastisk proces, der opfylder disse betingelser, er den standardiserede Browning Bridge

$$Z(t,T) = (T - t)W\left(\frac{t}{T - t}\right)$$

proces, som kan udtrykkes således:
Her er W en standardiseret Wiener proces. Dette udtryk betyder altså, at en Browning Bridge proces kan defineres ved en transformation af en Wiener proces.

Denne relation kan udtrykkes ved følgende stokastiske differentialligning:

$$dZ(t,T) = \frac{Z(t,T)}{T-t} + dW(t,T)$$

hvor W er en Wiener proces[74].

Det kan heraf ses, at Browning Bridge processen indeholder det element, at den bliver trukket tilbage til 0 for t → T. Denne kraft bliver selvfølgelig forstærket i takt med, at t nærmer sig T, indtil for t = T processen igen påtager sig værdien 0 med sandsynligheden 1.

Middelværdien for denne proces er $E_t[Z(t,T)] = 0$ og variansen $E_t[Z^2(t,T)] = t(T-t)$, som derfor ikke er stationær. Dette betyder, at selvom den øjeblikkelige varians for processen er konstant over tid, er dens totale varians ikke stationær. Denne egenskab hænger selvfølgelig sammen med egenskaberne/betingelserne givet i formel 174.

$$d\eta(t,T) = \frac{\eta(t,T)}{T-t} + \sigma dW$$

Ball og Touros definerer η(t,T) således:

Fejl!

Det vides ud fra det forrige, at logaritmen til obligationsprisen er defineret således:
Herudfra og ud fra processen for η(t,T) fra formel 177, finder man ved anvendelse af Itos

Fejl!

lemma herpå følgende relation for dP(t,T):

Af flere forskellige er det blevet vist, at denne model ikke er arbitrage-fri, bl.a. Aase Nielsen og Astrup Jensen (1988) og Cheng (1991), som viser, at den ikke er forenelig med Girsanovs teori. Dvs at det ikke er muligt at definere et ækvivalent Martingale mål for den stokastiske proces.

Jeg vil her med udgangspunkt i Aase Nielsen og Astrup Jensen (1988) og Schaefer og Schwartz (1987) påvise, at Ball og Torous` ikke kan betragtes som værende arbitrage-fri.

Jeg vil i den forbindelse undersøge, hvorledes den effektive rente udvikler sig i takt med, at obligationen nærmer sig udløb.

I henhold til formel 178 kan den effektive rente i grænsen at t → T, skrives således:

[74] Se Karlin og Taylor (1981) B, side 267-269, hvor Browning Bridge processen er nærmere gennemgået.

$$\frac{\ln P(t,T)}{T - t} = \mu - \frac{\eta(t,T)}{T - t}$$

$$\frac{\ln P(t,T)}{T - t} = \mu - \sigma W\left(\frac{t}{T - t}\right)$$

Som ved anvendelse af formel 175 kan omskrives til:
Dette betyder altså, at den effektive rente, i takt med at obligationen nærmer sig udløb, bliver en funktion af en konstant (μ) og en Wiener proces gående mod uendelig. Dette har den implikation, at i takt med at t nærmer sig T, vil den effektive rente svinge mere og mere og kraftigere og kraftigere. Faktisk vil den endog med sandsynligheden 1 påtage negative værdier uendelig tit.

Denne egenskab gør selvfølgelig modellen uinteressant i en økonomisk sammenhæng, da det, at den effektive rente har den ovenfor nævnte egenskab, når obligationen nærmer sig udløb, direkte må være at betragte som en fejlspecifikation.

Ud fra det foregående fremgår det, at disse to modeller begge lider af både teoretiske problemer og praktiske uhensigtsmæssigheder, som gør dem begrænset attraktive.

Nawalkha (1995) foreslår i den forbindelse en model, som indeholder følgende ingredienser: For det første opfyldes horisontbetingelsen, dvs P(T,T) = 1. For det andet tillades eksistensen af et ækvivalent martingale mål. For det tredje er modellen forenelig med en given initial rentestruktur, og for det fjerde er diffusionskoefficienten tids- og løbetidsafhængig. Det kan altså udledes, at hans partielle ligevægtsframework tillader en præferencefri fastlæggelse af optionspriser, der er konsistente med initial rentestrukturen og volatilitetsstrukturen.

Fejl!

I denne model antages det, at logaritmen i obligationspriserne kan beskrives som[75]:
Hvor L(t,T) er log t-periode afkastet på en T-perioder nulkuponobligation, som endvidere antages at være deterministisk, og σ(t,T) er volatilitetsstrukturen.

Ved at anvende Itos lemma på dette udtryk findes følgende udtryk for den stokastiske proces for obligationspriserne:

[75] Hvor dette udtryk er Nawalkhas pendant til formel 13.

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = \mu(t,T)dt + \sigma(t,T)dW$$

for

$$\frac{\delta L(t,T)}{\delta t} + \frac{\delta\sigma(t,T)}{\delta t}W + \frac{1}{2}\sigma^2(t,T)$$

Heraf fremgår det, at driften i obligationspris-processen er stokastisk, hvor dette præcis er forklaringen på, at det er muligt at opstille et ækvivalent martingale mål[76], som det vil blive vist nedenfor.

Kravet for at horisontbetingelsen er opfyldt, er, at σ(T,T) = 0.

Under hensyntagen til dette ses det, at den totale variation i HPR over perioden 0 to T også er nul (0), og da L(T,T) = σ(T,T) = 0, må obligationsprisen pr. definition konvergere mod 1 i formel 182.

For at undersøge om processen i formel 183 tillader eksistensen af et ækvivalent martingale mål, dvs den normerede prisproces har en drift lig nul (0), defineres her følgende normeret prisproces $\frac{P(t,T)}{P(t,T_1)}$, hvor $t < T_1 < T$. Yderligere antages det, at T_1 er exercisetidspunktet på en europæisk option.

Hvis det antages, at der er korrelation mellem de to obligationspriser P(t,T) og $P(t,T_1)$, kan det ved at anvende Itos lemma vises, at den stokastiske proces for den normerede prisproces

Fejl!

bliver som følger[77]:

$$W(T_1,T) = W(T_1,T) - \int_0^t \frac{\mu(s,T_1,T)}{\sigma(s,T_1,T)}ds$$

Et ækvivalent martingale mål opnås nu ved at anvende Girsanovs sætning således:
Hvor det heraf kan udledes, at under en ændring af sandsynlighedsmålet er den normerede prisproces en martingale.

Kravet til eksistensen af dette ækvivalente martingale mål er, som det fremgår af definition nr.

[76] Dette skal ikke forstås på den måde, at bare fordi driften er stokastisk betyder det, at der kan opstilles et ækvivalent martingale mål. Derimod skal det forstås, at for præcis dette problem er det forklaringen på, at netop dette kan lade sig gøre.

[77] Hvor dette udtryk er identisk med Nawalkhas formel 9.

1, at $E\left[e^{\frac{1}{2}\int_0^t \left[\frac{\mu(s,T_1,T)}{\sigma(s,T_1,T)}\right]^2 ds} \right] < \infty$.

Ved at betragte ratioen $\frac{\mu(t,T_1,T)}{\sigma(t,T_1,T)}$ ses det, at dette generelt vil være opfyldt, hvis $\sigma(t,T_1,T)$ opfører sig "pænt". Det må nemlig forventes, at $\sigma(t,T_1,T)$ kun vil gå mod nul (0), hvis obligationerne er perfekt korreleret, og diffusionskoeffecienterne er identiske[78].

Appendix C

Jeg vil her tage mit udgangspunkt i den løsningsmetode, som bl.a. er blevet anvist af Hull og White (1990).

$$P(t,T) = e^{A(\tau)r + B(\tau)}$$

Hull og White postulerer, at prisfunktionen kan skrives på følgende form:
hvor $\tau = T - t$ repræsenterer obligationens restløbetid.

Jeg vil her fokusere på CIR-modellen og i den forbindelse foretage en udledning af det analytiske udtryk for prisen på en nulkuponobligation.

Den partielle differentialligning for CIR-modellen får ved indsættelse af formel 186 følgende

$$\frac{1}{2}\sigma^2 rA^2 - \kappa rA - \lambda rA - r - r\frac{\delta A}{\delta \tau} = \frac{\delta B}{\delta \tau} - \kappa\theta A$$

udseende:

[78] Det antages selvfølgelig også, at den afledte med hensyn til tiden af L(t,T) og σ(t,T) er veldefineret.

Her har jeg, for at lette notationen, fjernet A og B`s afhængighed af τ, og lader dermed denne afhængighed være underforstået[79].

Løsningen til denne relation kræver, at de led som er afhængige af r samt dem, som ikke er det

$$\frac{1}{2}\sigma^2 A^2 - \kappa A - \lambda A - \frac{\delta A}{\delta \tau} - 1 = 0$$

- betinget af hinanden - er lig nul, således:

$$\frac{\delta B}{\delta \tau} - \kappa \theta A = 0$$

og
Jeg vil nu starte med at bestemme den funktionelle form for A, da dette udtryk indgår i fastlæggelsen af B.

$$\int_0^{\tau} \frac{1}{\frac{1}{2}\sigma^2 A^2 - \kappa A - \lambda A - 1} dA = \int_0^{\tau} d\tau$$

Det ligningssystem vi skal løse, kan skrives således:
Det vides her, at løsningen til integralet på højre side af lighedstegnet er τ.

For at løse dette integral er det nødvendigt at få skrevet det på en form, hvor stamfunktionen

$$y = \sqrt{(\kappa + \lambda)^2 + 2\sigma^2}$$

er kendt. I den forbindelse viser det sig, at følgende defintion vil være temmelig behjælpelig:

$$\int_0^{\tau} \frac{1}{\frac{1}{2}\sigma^2 \left(A - \frac{\kappa + \lambda + y}{\sigma^2}\right)\left(A - \frac{\kappa + \lambda - y}{\sigma^2}\right)} dA = \int_0^{\tau} d\tau$$

Med denne definition er det nu muligt at få omskrevet formel 190 således:
At denne omskrivning er valid er elementært at påvise med kendskab til definitionen i formel 191.

Endnu en omskrivning er nødvendig, før det er muligt at finde en løsning til dette integral.

[79] Begrundelsen for, at det sidste led på venstre side i formel 2 har et negativt fortegn, er, at den oprindelige partielle differentialligning blev udtrykt som en funktion af kalendertiden, hvorimod det, i forbindelse med løsningen af den partielle differentialligning, er nødvendigt at udtrykke tidsafhængigheden som en funktion af obligationens restløbetid. Denne omskrivning resulterer i et fortegnsskift.

$$\frac{1}{2}\frac{\kappa+\lambda+y}{y} - \frac{1}{2}\frac{\kappa+\lambda-y}{y} = 1$$

Denne omskrivning fremkommer i og med, at følgende relation er valid:

$$\int_0^\tau \left[\frac{\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{y}}{\frac{1}{2}\sigma^2\left(A - \frac{\kappa+\lambda+y}{\sigma^2}\right)} - \frac{\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{y}}{\frac{1}{2}\sigma^2\left(A - \frac{\kappa+\lambda-y}{\sigma^2}\right)} \right] dA = \int_0^\tau d\tau$$

Dette betyder nemlig, at formel 192 kan formuleres således:

$$\frac{1}{y}\left[\ln\left(A - \frac{\kappa+\lambda+y}{\sigma^2}\right) - \ln\left(A - \frac{\kappa+\lambda-y}{\sigma^2}\right)\right] + k = \tau$$

Løsningen til dette integral er nu ligetil, og resulterer i følgende udtryk:
Med udgangspunkt i randbetingelsen, P(t,T) = 1, kan k nu findes. Vi ved nemlig at dette betyder, at A(0) = 0, som ved indsættelse i formel 195 betyder, at konstanten k får følgende

$$k = \frac{1}{y}\ln\left(\frac{\kappa+\lambda+y}{\kappa+\lambda-y}\right)$$

form:

$$\ln\left[\frac{\left(A - \frac{\kappa+\lambda+y}{\sigma^2}\right)}{\left(A - \frac{\kappa+\lambda-y}{\sigma^2}\right)}\right] - y\tau = \ln\left(\frac{\kappa+\lambda+y}{\kappa+\lambda-y}\right)$$

Dette betyder, at formel 195 bliver af følgende form:
Nu da vi har fundet en løsning til formel 188, står der kun tilbage at isolere A, og her er

$$e^{-y\tau}\frac{\left(A - \frac{\kappa+\lambda+y}{\sigma^2}\right)}{\left(A - \frac{\kappa+\lambda-y}{\sigma^2}\right)} = \frac{\kappa+\lambda+y}{\kappa+\lambda-y}$$

$$\Rightarrow A - \frac{\kappa+\lambda-y}{\sigma^2} = e^{-y\tau}\left(\frac{\kappa+\lambda-y}{\kappa+\lambda+y}\right)\left(A - \frac{\kappa+\lambda+y}{\sigma^2}\right)$$

teknikken således:
Da $-2\sigma^2 = (\kappa + \lambda + y)(\kappa + \lambda - y)$, gang igennem med $\kappa + \lambda + y$, således:

$$A(\kappa + \lambda + y) + 2 = e^{-y\tau}(\kappa + \lambda - y)\left(A - \frac{\kappa + \lambda + y}{\sigma^2}\right) = 2(e^{-y\tau} - 1), \Rightarrow A = \frac{2(e^{-y\tau} - 1)}{2y + (\kappa + \lambda - y)(1 - e^{-}}$$

$$\Rightarrow A[\kappa(1 - e^{-y\tau}) + \lambda(1 - e^{-y\tau}) + y(1 + e^{-y\tau})] = 2(e^{-y\tau} - 1)$$

$$\Rightarrow A[2y + (\kappa + \lambda - y)(1 - e^{-y\tau})$$

Før jeg går over og finder det funktionelle udtryk for formel 189, viser det sig, at det i den forbindelse er nødvendigt at foretage en yderligere omskrivning af relationen for A i formel 199.
Jeg vil indledningsvis lade g(τ) være et udtryk for nævneren i formel 199, således at A nu kan

$$A = \frac{2(e^{-y\tau} - 1)}{g(\tau)}$$

skrives således:

$$A = -\frac{y - \lambda - \kappa}{\sigma^2}\left[\frac{(\kappa + \lambda + y)(e^{-y\tau} - 1)}{g(\tau)}\right]$$

$$\Rightarrow A = \frac{\kappa + \lambda - y}{\sigma^2}\left[1 + \frac{2ye^{-y\tau}}{g(\tau)}\right]$$

$$\Rightarrow A = \frac{\kappa + \lambda - y}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^2}\frac{2g'(\tau)}{g(\tau)}$$

$$for$$

$$g'(\tau) = y(\kappa + \lambda - y)e^{-y\tau}$$

Denne relation kan med kendskab til definitionen fra formel 191 omskrives således:
Nu er A kommet på en sådan form, at formel 189 relativt nemt kan løses. Lad mig dog først

$$\frac{\delta B}{\delta \tau} = \frac{\kappa\theta}{\sigma^2}\left[(\kappa + \lambda - y) + \frac{2g'(\tau)}{g(\tau)}\right]$$

lige indsætte relationen fra formel 201 heri, således:

$$B = \frac{\kappa\theta}{\sigma^2}\int_0^{\tau}\left[(\kappa + \lambda - y) + \frac{2g'(\tau)}{g(\tau)}\right]d\tau$$

Det betyder, at det er følgende integral, der skal løses:
Løsningen til dette udtryk er ligetil, i og med at det første led i den kantede parentes giver sig selv, og det andet kan løses ved anvendelse af substitutionsreglen.

$$B = \frac{\kappa\theta}{\sigma^2}\left[(\kappa + \lambda - y)\tau + 2\ln\left(\frac{1}{g(\tau)}\right) + k\right]$$

Med kendskab hertil findes løsningen som:
Ved indsættelse af τ = 0 viser det sig, at konstanten k bliver af følgende form:

$$k = -2\ln\left(\frac{1}{2y}\right)$$

Dette udtryk indsættes nu i formel 203, og ved anvendelse af regnereglerne for

$$B = \frac{\kappa\theta}{\sigma^2}\left[(\kappa + \lambda - y)\tau + 2\ln\left(\frac{2y}{g(\tau)}\right)\right]$$
$$\Rightarrow B = \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}\ln\left[\frac{2ye^{\frac{1}{2}(\kappa + \lambda - y)\tau}}{2y + (\kappa + \lambda - y)\left(1 - e^{-y\tau}\right)}\right]$$

logaritme-funktionen resulterer det i følgende udtryk:
Ved indsættelse af de funktionelle former for henholdsvis A og B fra henholdsvis formel 201 og 206 i den postulerede prisfunktion i formel 186 betyder dette, at prisen på en nulkupon-

$$P(t,T) = \left[\frac{2ye^{\frac{1}{2}(\kappa + \lambda - y)\tau}}{2y + (\kappa + \lambda - y)\left(1 - e^{-y\tau}\right)}\right]^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}} e^{\left[\frac{2r\left(e^{-y\tau} - 1\right)}{2y + (\kappa + \lambda - y)\left(1 - e^{-y\tau}\right)}\right]}$$
$$for$$
$$y = \sqrt{(\kappa + \lambda)^2 + 2\sigma^2}$$

obligation med en restløbetid lig τ vil kunne udtrykkes således:
Dette udtryk kan nemt indses at være ækvivalent med Cox, Ingersoll og Ross´ (1985) formel

$$P(t,T) = \left[\frac{2ye^{\frac{1}{2}(\kappa + \lambda + y)\tau}}{2y + (\kappa + \lambda + y)\left(e^{y\tau} - 1\right)}\right]^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}} e^{\left[\frac{-2r\left(e^{y\tau} - 1\right)}{2y + (\kappa + \lambda + y)(e^{y\tau} - 1)}\right]}$$

23, der som bekendt har følgende udseende:
Hvor r er den risikofrirente, θ er det langsigtede middelværdirenteniveau, κ er et udtryk for den hastighed hvormed konvergensen imod dette middelværdirenteniveau foregår, λ er markedsrisiko-parameteren og σ^2 er et udtryk for variansen i den korte rente.

Obligationsprisernes følsomhed over for ændringer i disse parametre kan kort beskrives således:

En stigning i konvergeringshastigheden har en to-delt effekt på prisen, som er afhængig af, om den risikofri rente ligger over eller under det langsigtede middelrenteniveau. Når den risikofri rente ligger under dette middelværdirenteniveau er priserne faldende, og omvendt når den risikofri rente ligger over middelværdirenteniveauet.

Priserne er endvidere faldende i takt med enten en stigning i middelværdirenteniveauet, eller den risikofri rente.

Hvad angår markedsrisikoparameteren, vil priserne være stigende i takt med stigningen heri, hvilket også er intuitivt logisk.

Denne effekt vil også være at forvente, når det drejer sig om variansparameteren, og viser sig faktisk at være tilfældet. Her skal dog tilføjes, at denne effekt er betragtelig mere udslagsgivende for lange obligationer end for korte obligationer.

Hvilket kan forstås ved, at i en verden under usikkerhed vil en risikoavers investor forlange en risikopræmie, som i CIR-modellen er positiv afhængig af det omhandlende aktivs løbetid[80].

Med kendskab til relationen mellem diskonteringsfunktionen og rentestrukturen er det nu muligt, med udgangspunkt i formel 208, at finde den funktionelle form for rentestrukturen,

$$R(t,T) = -\frac{2\kappa\theta}{\tau\sigma^2}\ln\left[\frac{2ye^{\frac{1}{2}(\kappa+\lambda+y)\tau}}{2y+(\kappa+\lambda+y)\left(e^{y\tau}-1\right)}\right] + \frac{1}{\tau}\left[\frac{-2r\left(e^{y\tau}-1\right)}{2y+(\kappa+\lambda+y)\left(e^{y\tau}-1\right)}\right]$$

nemlig:
Ud fra dette udtryk kan det indses, at CIR-modellen har følgende implikationer for

$$\lim_{\tau\to 0} R(t,T) \to r$$

og

$$\lim_{\tau\to\infty} R(t,T) \to \frac{2\kappa\theta}{\kappa+\lambda+y}$$

henholdsvis rentestrukturens korte og lange ende:
Hvor det tydeligt fremgår, at konsolrenten er uafhængig af den korte rente.

Endvidere kan det udledes, at når spotrenten (r) ligger under den asymptotiske konsolrente er

$$\frac{\kappa\theta}{\kappa+\lambda} \geq \lim_{t\to\infty} R(t,T)$$

rentestrukturen stigende, og for spotrenter over følgende relation:
vil rentestrukturen være faldende. For mellemliggende værdier af r vil rentestrukturen være puklet, og hvor placeringen af denne pukkel vil ligge tidligere og tidligere i løbetidsspektret i takt med faldet i variansen for den korte rente (σ^2).

Det kan endvidere ud fra formel 210 og definitionen af konsolrenten fra formel 211 tydeligt ses, at rentestrukturen stort set vil være repræsenteret ved en "ret linie" for $\sigma \to 0$, da for $\sigma = 0$ vil konsolrentedefinitionen degenerere til formel 211.

Appendix D

[80] Dette er også hovedideen bag den likvide præferenceteori, som CIR-modellen hermed kan konkluderes at være forenelig med.

Prisfunktionen for Vasicek modellen viser sig at have samme form som den postulerede

$$P(t,T) = e^{A(\tau)r + B(\tau)}$$

prisfunktion som Cox, Ingersoll og Ross modellen, altså således:
hvor τ repræsenterer obligationens restløbetid.

Ved indsættelse af denne relation i den partielle differentialligning for Vasicek modellen,

$$\frac{1}{2}\sigma^2 A^2 - \kappa r A - \lambda\sigma A - r - r\frac{\delta A}{\delta\tau} - \frac{\delta B}{\delta\tau} + \kappa\theta A = 0$$

fremkommer følgende udtryk:
Jeg har for at lette notationen fjernet A og B`s afhængighed af τ, og lader dermed denne afhængighed være underforstået.

Løsningen til denne relation kræver, at de led som er afhængig af r samt dem som ikke er det -

$$\frac{\delta A}{\delta\tau} + \kappa A + 1 = 0$$

betinget af hinanden - er lig nul således:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 A^2 + \kappa\theta A - \lambda\sigma A - \frac{\delta B}{\delta\tau} = 0$$

og
Jeg vil nu starte med at bestemme den funktionelle form for A, da dette udtryk indgår i fastlæggelsen af B.

$$-\int_0^\tau \frac{\frac{1}{\kappa}}{A + \frac{1}{\kappa}} dA = \int_0^\tau d\tau$$

Det ligningssystem, der skal løses, kan skrives således:

$$A = \frac{e^{-\kappa\tau} - 1}{\kappa}$$

Dette kan nemt vises at ville resultere i følgende udtryk for A:

Ved indsættelse af denne relation i formel 215 og ved at foretage lidt omskrivning viser det sig, at det er følgende integral, vi ønsker at finde løsningen på:

$$B = \int_0^{\tau}\left[\frac{1}{2}\frac{\sigma^2 e^{-2\kappa\tau}}{\kappa^2} + \frac{1\sigma^2}{2\kappa^2} - \frac{\sigma^2 e^{-\kappa\tau}}{\kappa^2} + \theta e^{-\kappa\tau} - \theta - \frac{\lambda\sigma e^{-\kappa\tau}}{\kappa} + \frac{\lambda\sigma}{\kappa}\right]d\tau$$

Løsningen til dette integral, under hensyntagen til randbetingelsen B(0) = A(0) = 0, er

$$B = -\frac{1}{4}\frac{\sigma^2 e^{-2\kappa\tau}}{\kappa^3} + \frac{1\sigma^2\tau}{2\,\kappa^2} + \frac{\sigma^2 e^{-\kappa\tau}}{\kappa^3} - \frac{\theta e^{-\kappa\tau}}{\kappa} - \theta\tau$$
$$+ \frac{\lambda\sigma e^{-\kappa\tau}}{\kappa^2} + \frac{\lambda\sigma\tau}{\kappa} + \frac{\theta}{\kappa} - \frac{\lambda\sigma}{\kappa^2} - \frac{3\sigma^2}{4\kappa^3}$$

ligefrem og giver følgende resultat:
Nu da den funktionelle form for både A og B er fundet, kan den resulterende prisfunktion nu

$$P(t,T)$$
$$= \exp\left[\frac{re^{-\kappa\tau}}{\kappa} - \frac{r}{\kappa} - \frac{1}{4}\frac{\sigma^2 e^{-2\kappa\tau}}{\kappa^3} + \frac{1\sigma^2\tau}{2\,\kappa^2} + \frac{\sigma^2 e^{-\kappa\tau}}{\kappa^3} - \frac{\theta e^{-\kappa\tau}}{\kappa} - \theta\tau + \frac{\lambda\sigma e^{-\kappa\tau}}{\kappa^2} + \frac{\lambda\sigma\tau}{\kappa} + \frac{\theta}{\kappa} - \frac{\lambda\sigma}{\kappa^2} - \frac{3\sigma^2}{4\kappa^3}\right]$$

findes ved indsættelse af disse to udtryk i formel 212, således:
Dette udtryk er ikke særlig pænt, og måden at få en lidt pænere form på, er ved først at finde rentestrukturen givet diskonteringsfunktionen. Derefter finder man dennes asymptotiske værdi

$$R(\infty) = \theta - \frac{\lambda\sigma}{\kappa} - \frac{1\sigma^2}{2\kappa^2}$$

for t gående mod uendelig. Det viser sig nemlig, at dette vil kunne skrives således:
Ved at anvende denne relation på formel 220 medfører det, at følgende omskrivning kan

Fejl!

foretages:
Som kan indses at være ækvivalent med Vasiceks formel 27.

Denne rentestruktur starter for $\tau \to 0$ i den øjeblikkelige værdi af tilstandsvariablen - spotrenten. For $\tau \to \infty$ går renten mod en asymptote R(∞), der er uafhængig af den øjeblikkelige værdi af spotrenten.

$$for:$$

$$r < R(\infty) - \frac{1\sigma^2}{4\kappa^2} \quad \textit{er Rentestrukturen stigende}$$

$$r > R(\infty) + \frac{1\sigma^2}{2\kappa^2} \quad \textit{er Rentestrukturen faldende}$$

Endvidere vil rentestrukturens mulige udseender kunne formuleres således:
For mellemliggende værdier af r, vil rentestrukturen være pukkelformet, dog med maksimalt

en pukkel over løbetidsspektret.

Appendix E

Det antages, at løsningen til Walters (1995) to-faktor rentestrukturmodel kan skrives på

$$P(t,T) = e^{A(\tau)s + B(\tau)l + C(\tau)}$$

følgende form:
hvor $\tau = T - t$ repræsenterer obligationens restløbetid.

Den partielle differentialligning for Walters model får, ved indsættelse af formel 224 i formel 58 i teksten, følgende udseende:

$$- sA_\tau(\tau) - lB_\tau(\tau) - C_\tau(\tau) + A(\tau)\kappa_s\theta_s - A(\tau)\kappa_s s - A(\tau)\Gamma_s$$
$$- B(\tau)l\Gamma_l + \frac{1}{2}\sigma_s^2 A^2(\tau) + \frac{1}{2}\sigma_l^2 lB^2(\tau) = s + l$$

Hvor fodtegnene til A(τ), B(τ) og C(τ) repræsenterer partielle afledte.

Løsningen til dette ligningssystem kræver, at de led der er afhængig af henholdsvis s og l samt

$$- C_\tau + A\kappa_s\theta_s - A\Gamma_s + \frac{1}{2}\sigma_s^2 A^2 = 0$$

de resterende led - betinget af hinanden - er lig nul (0), altså[81]:

$$sA_\tau + A\kappa_s s + s = 0$$

og

$$- lB_\tau + \frac{1}{2}\sigma_l^2 lB^2 - Bl\Gamma_l - l = 0$$

og
Det fremgår i den forbindelse, at det er nødvendigt først at løse formel 227 før formel 226, da udtrykket for A indgår i formel 226.

Løsningen til formel 227 er kendt fra Vasicek modellen, og resulterer - som vist i Appendix D

$$A = \frac{e^{-\kappa_s\tau} - 1}{\kappa_s}$$

- i følgende udtryk for A:
Givet A har vi fra Vasicek modellen, at C kan skrives som:

[81] I dette Appendix vil der i flæng blive anvendt henholdsvis notationen A og A(τ) osv.

$$C = \frac{D}{\kappa_s}e^{-\kappa_s\tau} + \tau D - \frac{D}{\kappa_s} - \frac{1}{4}\frac{\sigma_s^2}{\kappa_s^2}[1 - e^{-\kappa_s\tau}]^2$$

for

$$D = \frac{1}{2}\frac{\sigma_s^2}{\kappa_s^2} - \frac{\theta_s\kappa_s - \Gamma_s}{\kappa_s}$$

Hvor D kan genkendes som værende identisk med -R(∞) fra Vasicek modellen.

$$\int_0^\tau \frac{1}{\left[\frac{1}{2}\sigma_l^2 B^2 - B\Gamma_l - 1\right]} dB = \tau$$

Hvad angår B, skal vi her løse følgende integral:

$$\int_0^\tau \frac{1}{\left[\frac{1}{2}aX^2 + bX + c\right]} dX = \tau$$

Hvis nu følgende integral betragtes:

$$\tau = \frac{1}{\gamma}\ln\left[k\frac{X - x_1}{X - x_2}\right]$$

for

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

og

$$\gamma = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

kan det vises, at dette vil kunne omskrives til:
Heraf ses det, at x_1 og x_2 repræsenterer de reelle rødder til polynomiet i nævneren i formel 232, og hvor det altså fremgår, at integralet kan løses, hvis rødderne i dette polynomium er forskellige[82]. Yderligere betegner k konstanten, som i dette tilfælde er givet ved $\frac{x_2}{x_1}$.

[82] Kravet til at rødderne er forskellige og reelle er, at diskrimanten - dvs γ - er positiv.

$$\tau = \frac{1}{\gamma}\ln\left[k\frac{B - \frac{\Gamma_l - \gamma}{\sigma_l^2}}{B + \frac{\Gamma_l - \gamma}{\sigma_l^2}}\right]$$

$$\Rightarrow B = -\frac{2[e^{\gamma\tau} - 1]}{2\gamma + [\gamma + \Gamma_l][e^{\gamma\tau} - 1]}$$

$$for$$

$$\gamma = \sqrt{\Gamma_l^2 + 2\sigma_l^2}$$

Hvis denne teknik anvendes på formel 231, fås følgende udtryk for B[83]:

$$P(t,T) = e^{A(\tau)s + B(\tau)l + C(\tau)}$$

$$for$$

$$A(\tau) = \frac{e^{-\kappa_s\tau} - 1}{\kappa_s}$$

$$B(\tau) = -\frac{2[e^{\gamma\tau} - 1]}{2\gamma + [\gamma + \Gamma_l][e^{\gamma\tau} - 1]}$$

$$C = \frac{D}{\kappa_s}e^{-\kappa_s\tau} + \tau D - \frac{D}{\kappa_s} - \frac{1}{4}\frac{\sigma_s^2}{\kappa_s^2}[1 - e^{-\kappa_s\tau}]^2$$

$$og$$

$$D = \frac{1}{2}\frac{\sigma_s^2}{\kappa_s^2} - \frac{\theta_s\kappa_s - \Gamma_s}{\kappa_s}$$

$$\gamma = \sqrt{\Gamma_l^2 + 2\sigma_l^2}$$

Slutteligt kan det analytiske udtryk for prisen på en nulkuponobligation altså skrives som:

$$\lim_{\tau \to 0} R(t,T) = s + l = r$$

$$og$$

$$\lim_{\tau \to \infty} R(t,T) = -D$$

De asymptotiske egenskaber for denne model kan vises at være:
dvs. Walters to-faktor rentestrukturmodel har samme asymptotiske egenskaber som Vasiceks en-faktor model dog med den krølle, at i Walters model er den korte rente givet som summen af de to tilstandsvariable.

[83] Hvor denne teknik også er anvendt i løsningen af formel 190 i Appendix C.

Appendix F

$$dx = \kappa[\theta - x]dt + \sigma dW$$
$$for$$
$$r = x^2$$

For den kvadratiske rentestrukturmodel haves følgende stokastiske proces for spotrenten:

$$P(t,T) = e^{A(\tau)x^2 + B(\tau)x + C(\tau)}$$

Det antages, at prisen på en nulkuponobligation i denne model kan skrives på følgende form: for τ værende restløbetiden, dvs $\tau = T - t$.

Ved at anvende formel 238 på formel 121 i teksten, resulterer dette i at følgende tre

$$1: \quad -C_\tau + \kappa\theta B - \Gamma B + \frac{1}{2}\sigma^2 B^2 + \sigma^2 A = 0$$
$$og$$
$$2: \quad -xB_\tau + 2A[\kappa\theta x - \Gamma x] - B\kappa x + 2\sigma^2 xAB = 0$$
$$og$$
$$3: \quad -x^2 A_\tau + 2\sigma^2 x^2 A^2 - 2\kappa x^2 A - x^2 = 0$$

differentialligninger skal løses interaktivt[84]:

[84] I dette Appendix vil der i flæng blive anvendt betegnelsen A(τ) og A osv.

For $\Gamma = \lambda\sigma$, værende defineret som markedsrisikoparameteren.

Først løses relation nr. 3 fra formel 239, som ved at anvende teknikken fra formel 233 i

$$A = -\frac{e^{2\gamma\tau} - 1}{2\gamma + [\gamma + \kappa][e^{2\gamma\tau} - 1]}$$
$$for$$
$$\gamma = \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma^2}$$

Appendix E, resulterer i, at A får følgende udseende:

$$-B_\tau + B[2\sigma^2 A - \kappa] + 2A[\kappa\theta - \Gamma] = 0$$

Lad mig indledningsvis foretage en lille omskrivning af relation nr. 2 fra formel 239, således:

Det fremgår altså, at B er løsningen til en førsteordens ordinær differentialligning, og hvor løsningen hertil er givet ved:

$$B = -e^{-D(\tau)}\int_0^\tau Q(s)\, e^{D(s)}\, ds$$
$$for$$
$$Q(\tau) = 2A(\tau)[\kappa\theta - \Gamma]$$
$$og$$
$$D(\tau) = \int_0^\tau [2\sigma^2 A(s) - \kappa]ds$$

$$\int_t^T A(s,T)\, ds = -\frac{1}{2\sigma^2}\left[\ln\left(\frac{2\gamma}{g(t,T)} + \right)(\kappa + \gamma)(T - t)\right]$$
$$for$$
$$g(t,T) = (\kappa + \gamma)e^{2\gamma(T - t)} - (\gamma - \kappa)$$

I og med at $\int_t^T A(s,T)\, ds$, i henhold til Appendix C, kan skrives som:

således at formel 242 kan omskrives til:

$$B = -e^{-D(\tau)}\int_0^{\tau} Q(s)\, e^{D(s)}\, ds$$

for

$$Q(\tau) = 2A(\tau)[\kappa\theta - \Gamma]$$

og

$$D(\tau) = -\ln\left(\frac{2\gamma}{g(t,T)} + \right)\gamma(T - t)$$

$$B = -\int_t^T \frac{Q(s,T)\, H(s,T)}{H(t,T)}\, ds$$

for

$$Q(t,T) = 2A(t,T)[\kappa\theta - \Gamma]$$

og

$$: e^{\gamma v}[(\kappa + \gamma)e^{2\gamma(T - v)} + (\gamma - \kappa)]$$

$$C = \int_0^{\tau} B(s)\,[\kappa\theta - \Gamma]ds + \frac{1}{2}\sigma^2\int_0^{\tau}[2A(s) + Bsup2(s)]ds$$

Endeligt kan dette udtryk blive reduceret til følgende simple integralligning:

Slutteligt indses det, at C er løsningen til følgende integralligning:
Således at det semi-analytiske udtryk for prisen på en nulkuponobligation i den kvadratiske rentestrukturmodel slutteligt kan skrives som:

$$P(t,T) = e^{x^2 A(\tau) + xB(\tau) + C(\tau)}$$

for

$$A(\tau) = -\frac{e^{2\gamma\tau} - 1}{2\gamma + [\gamma + \kappa][e^{2\gamma\tau} - 1]}$$

$$B(\tau) = -\int_0^\tau 2A(s)[\kappa\theta - \Gamma]\frac{H(s)}{H(\tau)}ds$$

$$C(\tau) = \int_0^\tau B(s)[\kappa\theta - \Gamma]ds + \frac{1}{2}\sigma^2\int_0^\tau [2A(s) + B^2(s)]ds$$

og

$$H(v,T) = e^{\gamma v}[(\kappa + \gamma)e^{2\gamma(T - v)} + (\gamma - \kappa)]$$

$$\gamma = \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma^2}$$