ARBITRAGEFRI MODELLERING AF RENTESTRUKTURDYNAMIKKEN

Claus Madsen

version 9. marts 1994
revideret 31. august 1994
revideret 28. december 1994
revideret 15. august 1995

e-mail: cam@fineanalytics.com

Arbitragefri modellering af rentestrukturdynamikken

1: Indledning

Dette papir vil beskæftige sig med modellering af dynamikken i rentestrukturen med udgangspunkt i det framework, der er blevet udviklet af Heath, Jarrow og Morton (HJM) (1987)/(1991).

Der vil i den forbindelse blive startet med en diskussion af forskellen imellem de traditionelle ligevægsmodeller, såsom Cox, Ingersoll og Ross (1985), og det arbitragebaserede framework defineret ved Heath, Jarrow og Morton.

I gennemgangen vil jeg først starte med at vise, hvorledes risikoparameteren i de ligevægtsbaserede modeller bliver fundet. Herefter vil jeg, med obligationsprocessen in mente, udlede den proces, som forwardpriserne må forventes at følge. Yderligere vil risikopræmien når det er forwardprisen der betragtes, blive vist. Dette bliver gjort ved anvendelse af det risikofri arbitrageargument.

Under antagelse om at volatilitetsstrukturen er deterministisk, vil der efterfølgende med udgangspunkt i spotrente- og obligationsprisprocessen blive udledt de diffusionsprocesser, som forwardrenter og forwardpriser følger. Herefter vil den risikoneutrale forwardrenteproces blive bestemt, hvor det viser sig, at driften i forwardrenterne er fuldt ud defineret, når først volatilitetsstrukturen for forwardrenterne er fastlagt.

I afsnit 7 vil jeg derefter foretage en klassificering af de volatilitetsstrukturer for forwardrenterne, der hovedsageligt har været behandlet i den empiriske litteratur. Hvor hovedvægten vil blive lagt på den såkaldte eksponentielle decay model.

I afsnit 8 vil der blive diskuteret, hvorledes fastlæggelsen af volatilitetsstrukturen kan foretages ved anvendelse af "noterede" priser på nulkuponobligationer under hensyntagen til, at volatilitetsstrukturen opfylder Markov egenskaben.

Afsnit 9 vil indeholde nogle betragtninger omkring implicit fastlæggelse af volatilitetsstrukturen. Hovedidéen til dette afsnit kommer fra Brown og Schaefers (1991) affine rentestrukturmodeldiskussion, hvor de viser, hvorledes det er muligt at få bestemt den implicitte volatilitetsstruktur som er indeholdt i traditionelle rentestrukturmodeller, såsom Cox, Ingersoll og Ross (1985) og Vasicek (1977). Endvidere betragtes en ikke-lineær

rentestrukturmodel - nemlig Longstaff (1989).

Hvad angår den implicitte volatilitetsstruktur for multifaktormodeller betragter jeg her Longstaff og Schwartz (1991), Vasicek og Fong (1991) og endelig den multifaktor gaussiske rentestrukturmodel givet ved Langetieg (1980). Der vil endvidere i nogle af tilfældende blive vist, hvorledes man ad denne vej kan opstille HJM pendanten til de ligevægtsbaserede rentestrukturmodeller.

Endelig vil afsnit 10 beskæftige sig med invertering af spotrenteprocessen til matching af initial rentestrukturen. Udgangspunktet i denne diskussion er Hull og White (1993), som i den forbindelse også relateres til resultaterne fra Babbs (1990)/(1993).

2: Ligevægtsmodeller contra arbitragemodeller

Der eksisterer i princippet to typer af modeller til beskrivelse af dynamikken i rentestrukturen - nemlig de ligevægtsbaserede og de arbitragebaserede.

I og med at udelukkelsen af arbitragemuligheder er et fundamentalt krav for økonomisk ligevægt, kan man betragte ligevægtsmodellerne som værende en delmængde af de arbitragebaserede metoder. Dette indikerer dog ikke, at de to metoder kan betragtes som værende direkte substitutter.

Den ligevægtsbaserede metode, såsom Cox, Ingersoll og Ross (1985) (CIR) og Vasicek (1977), fokuserer hovedsageligt på prisfastsættelse af obligationer ud fra den aktuelle værdi af den øjeblikkelige spotrente (den risikofri rente). I disse modeller fungerer den aktuelle spotrente som dynamikkens underliggende tilstandsvariabel.

Obligationsudtryk findes herefter ved at løse en partiel differentialligning, som fremkommer ud fra forudsætninger, enten eksplicitte eller implicitte, omkring præferencestrukturen og dynamikken i den underliggende tilstandsvariabel. En uheldig konsekvens af denne metode er, at det ofte er nødvendigt med temmelig restriktive præferenceantagelser for at finde et analytisk udtryk (closed-form-solution) for den resulterende partielle differentialligning.

For eksempel kan det påpeges, at CIR antager en logaritmisk præferencestruktur.

Vasiceks metode afviger herfra i og med, at han ikke eksplicit foretager nogle antagelser omkring præferencestrukturen. Dette gøres derimod implicit, når dynamikken i spotrenten og markedsrisikoparameteren er specificeret. Det er derfor vanskeligt at afgøre, om Vasiceks antagelse, at markedsrisikoparameteren er konstant, sammen med antagelsen at spotrenten følger en O-U-proces, indikerer en præferencestruktur, som er mere eller mindre restriktiv end den fra CIR-modellen.

Et resultat af at anvende ligevægtsmetoden er, at den resulterende obligationsprisfunktion kan

blive præferenceafhængig. Denne fastlæggelse af præferencestrukturen har dog sine fordele i og med, at givet parameterværdierne, kan priserne på alle obligtioner uanset løbetid bestemmes. Dette betyder altså, at hele rentestrukturen kan fastlægges ved kun at kende et lille antal parametre.

Metoden kan dog resultere i det uønskede resultat, at prisfastsættelsen af betingede fordringer bliver præferenceafhængig, som i eksempelvis CIR (1985).

Den arbitragebaserede metode blev første gang introduceret af Ho og Lee (1986). Ho og Lee modellen er i modsætning til CIR og Vasicek modellerne en diskret model.

Ho og Lees metode afviger fra alle tidligere metoder for beskrivelse af dynamikken i rentestrukturen. De tager nemlig intial rentestrukturen for givet og opstiller herefter restriktioner på, hvorledes diskonteringsfunktionen kan bevæge sig over tid uden at disse bevægelser kolliderer med det risikofri arbitrageargument. Dette betyder altså, at denne metode, pga. konstruktionen, vil matche initialrentestrukturen.

Ho og Lees model bliver dog opstillet for at prisfastsætte renteafhængige betingede fordringer - såsom optioner - og ikke obligationer i sig selv.

De anvender principielt set det samme princip, som Black og Scholes anvendte til prisfastsættelse af optioner, da de prisfastsætter fordringer, som om de bliver betragtet i en risiko neutral verden. Altså betingede fordringer prisfastsættes "uafhængig" af præferencestrukturen.

Heath, Jarrow og Morton (1987)/(1991) (HJM) har generaliseret og udvidet Ho og Lees metode til kontinuert tid og ved at inkorporere mere generelle processer - dog i et anderledes framework end Ho og Lee.

HJM fokuserer i modsætning til Ho og Lee på dynamikken i forwardrentestrukturen i stedet for diskonteringsfunktionen.

Ved at tage spotrentestrukturen som givet bliver det muligt for HJM og Ho og Lee at inkorporere al den information der forefindes i rentestrukturen - såsom implicitte forventninger om fremtidige spot- og forwardrenter.

HJM fokuserer på processer for forwardrenterne som har en variansproces der er uafhængig af præferencestrukturen, da dette betyder, at prisfastsættelse af betingede fordringer kan foregå uafhængig af kendskabet til præferencestrukturen.

Da HJM lægger hovedvægten på valueringen af betingede fordringer, undersøger de hvorledes forwardrenterne må udvikle sig i en risiko neutral verden. Hvis det i deres framework skal være muligt at prisfastsætte obligationer, er det nødvendigt, at forwardrentebevægelserne inkorporerer risikopræferencer, se Heath, Jarrow og Morton (1991) eller Jamshidian (1987)/

(1990).

Dette betyder altså, at for at identificere en proces for rentestrukturen i HJM`s framework er der to ting, der skal specificeres, nemlig markedsrisikoen og volatiliteten i forwardrenterne.

Det er imidlertidigt således, at preferencestrukturen og forwardrentevolatiliteten ikke kan fastlægges arbitrært. HJM opstiller en række kriterier, som skal være opfyldt, for at processen for forwardrenterne og præferencestrukturen ikke kolliderer med det risikofri arbitrageargument[1].

Det er dog på trods heraf, som senere vil blive vist, muligt at opstille obligationsprisudtryk som er uafhængig af præferencestrukturen, da det viser sig, at obligationsprisvolatiliteten i visse tilfælde kan fungere som markedsrisikoparameteren[2]. Det vil altså sige, at det resulterende funktionelle udtryk er forenelig med en hvilken som helst "tilladt" form for præferencestruktur.

Dette indikerer, som vil blive vist senere, at obligationsprisudtrykket som bliver udledt i dette framework, i stil med Black og Scholes optionsprisformel, kun vil være en funktion af variansprocessen for forwardrenterne. Altså en karakteristik af driften i forwardrenterne, såsom mean-reversion, behøver ikke at blive modelleret, da det eneste der behøves er den funktionelle form på forwardrenternes variansproces.

Det er nu muligt at specificere mere præcist, hvad forskellen er imellem den traditionelle ligevægtsmetode (CIR og Vasicek) og den arbitragebaserede metode (HJM og Jamshidian).

HJM`s metode tager hele initialrentestrukturen som givet og tillader, at denne evolverer over tid i henhold til en kontinuert stokastisk proces.

Ligevægtsmodellen derimod forudsætter først, at spotrenten indeholder tilstrækkelig statistik til at beskrive hele rentestrukturen. Derefter antager disse modeller, at spotrenten ikke kun er i stand til at beskrive hele initial rentestrukturen men også dynamikken i rentestrukturen. Disse forudsætninger bliver foretaget, da hovedformålet med disse modeller er at modellere dynamikken i obligationspriserne ved anvendelse af kun et lille antal faktorer. Et praktisk problem her er dog, at dette ikke vil garantere, at modellerne matcher initialrentestrukturen[3].

Ligevægtsmodellerne er selvfølgelig også i stand til at prisfastsætte betingede fordringer, men da de resulterende prisformler kan risikere at være præferenceafhængige er de ikke så

---

[1] Disse betingelser vil blive taget op senere i papiret.

[2] Dette vil blive vist senere i papiret.

[3] Det er dog på trods heraf muligt at gøre de ligevægtsbaserede modeller markedskonforme - dvs få dem til at matche initial rentestrukturen og initial volatilitetsstrukturen. Dette vil blive vist i afsnit 10.

appellerende. Dette betyder nemlig, at det kan være nødvendigt at skulle specificere markeds-risikoparameteren, før at det er muligt at prisfastsætte en afledt fordring.

Endnu en uønsket egenskab ved de ligevægtsbaserede modeller beskæftiger sig med, hvorledes en meningsfuld fler-faktor model, som kan løses analytisk, skal specificeres. Selvom det er tilfældet, at der eksisterer analytiske løsninger til multidimensionelle mean-reversion processer, er det ikke indlysende, hvad disse faktorer skal repræsentere, eller om de overhovedet skal indeholde en mean-reversion.

Jeg vil nu fortsætte min gennemgang med at genkalde hovedargumenterne for ligevægtsmodellerne, før jeg går over i en nærmere analyse af, hvorledes HJM`s arbitragemodel kan konstrueres.

3: Ligevægtsmodeller for rentestrukturen

Usikkerheden i økonomien er, som vanligt, defineret ved et sandsynlighedsrum (Ω,F,P), hvor Ω angiver hele udfaldsrummet, P er et sandsynlighedsmål og F er hændelsesrummet. Det antages samtidig, at der eksisterer en m-dimensionel Wiener proces $W = [W(t);0 < t \leq T < \tau]$, hvor komponenterne $W_i(t)$, for $i = \{1,2,....,m\}$ er uafhængige[4] en-dimensionelle Wiener processer med en drift lig nul (0) og en varians lig en (1).

Jeg vil nu opstille en en-faktor kontinuert model for rentestrukturen[5], hvor denne ene faktor er den risikofri rente.[6]

Det antages her, at den risikofri rente følger en stokastisk proces af Ito-typen således;

$$dr(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW \qquad \textbf{(1)}$$

hvor $\mu(t)$ som er kendt på tidspunkt t er driftskoefficienten, $\sigma(t)$ som også er kendt på tidspunkt t er diffusionskoefficienten, og dW er en Wiener proces med følgende egenskaber: $(dW)^2 = dt$, $dtdW = 0$ og $(dt)^2 = 0$. Det forudsættes endvidere, at $\mu(t)$ og $\sigma(t)$ er tidsinvariante, dvs $\mu(t) = \mu$ og $\sigma(t) = \sigma$.

Hvis det antages, at der eksisterer en fordring P(t,T), som kun er afhængig af r og t vil P(t,T)

---

[4] Uafhængighedsantagelsen er dog ikke et fundamentalt krav. Det er kun fremsat her af praktiske årsager. En slækkelse på denne antagelse vil da også blive foretaget senere i notatet.

[5] Se Madsen (1995a) for yderligere information.

[6] Ud over det umiddelbare indlysende i at vælge den risikofri rente som denne ene faktor, er der også en teknisk fordel herved. Dette da det kan vises, at den risikofri rente under alle omstændigheder vil indgå i den fundamentale partielle differentialligning ligemeget om den er valgt som tilstandsvariabel eller ej.

ifølge Itos lemma tilfredsstille følgende partielle differentialligning (PDE):

$$dP(t,T) = \left[\frac{\delta P(t,T)}{\delta t} + \frac{\delta P(t,T)}{\delta r}\mu + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 P(t,T)}{\delta r^2}\sigma^2\right] dt + \frac{\delta P(t,T)}{\delta r}\sigma dW \tag{2}$$

Ved anvendelse af det risikofri arbitrageargument kan den søgte parabolske differentialligning, som alle fordringer P(t,T) skal tilfredstille for at udelukke arbitrage muligheder, formuleres som:

$$\frac{\delta P(t,T)}{\delta t} + \frac{\delta P(t,T)}{\delta r}[\mu - \Gamma(t)] + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 P(t,T)}{\delta r^2}\sigma^2 - rP(t,T) = 0 \tag{3}$$

Denne udledning er som bekendt blevet udledt under den antagelse, at den stokastiske tilstandsvariabel ikke var en "observerbar"[7] fordring, eftersom markeds-risikoparameteren Γ indgår i den fundamentale partielle differentialligning.

Det risikofri arbitrageargument, som er blevet anvendt i udledningen af formel 3, har følgende udseende:

$$\mu = r - \lambda\sigma \quad for\ \Gamma(t) = \Gamma = \lambda\sigma \tag{4}$$

som siger, at risikopræmien kan betragtes som værende defineret ved en lineær model i n-faktorer (her en), en for hver eneste usikkerhed, og hvor hver enkelt komponent i risikopræmien er givet ved produktet af den pågældende risikofaktors kvantitet (σ), og ligevægts kompensationerne for at påtage sig den omhandlende risikoeksponering (λ).

En række studier i litteraturen har udledt udtryk af samme form som formel 3, f.eks. Vasicek (1977). I denne model er risiko-faktor-parameteren (Γ) bestemt eksogent, og er som nævnt tidligere antaget at være konstant - dvs $\Gamma = \lambda\sigma$.

En anden metode, som resulterer i den samme fundamentale differentialliging, er blevet anvendt af Cox, Ingersoll og Ross. I deres studier opstiller de en intertemporal ligevægtsmodel, som inkorporerer forskellige økonomiske variable, herunder renten og risiko-faktor-parameteren - som her bliver bestemt endogent i modellen ved anvendelse af nytteteorien. I denne model resulterer deres intertemporale ligevægtsmodel i, at risikopræmien Γ bliver defineret som λr.

[7] Se Madsen (1995a) for en nærmere forklaring på udledelsen af den grundlæggende partielle differentialligning, hvis den stokastiske tilstandsvariabel er en "observerbar" fordring. Det skal dog nævnes, at udtrykket "observerbar" fordring her er anvendt til at definere om en fordring er handlebar. I den forbindelse skal det pointeres, at renter, inflationssatser ol. ikke er at betragte som "observerbare" fordringer.

En generel beskrivelse af drift- og diffusionsparameteren fra formel 1 som indeholder en lang række af de i litteraturen foreslåede en-faktor ligevægtsmodeller for rentestrukturen, og dermed også Vasicek og Cox, Ingersoll og Ross som specialtilfælde, kan skrives således:

$$\begin{gathered} \mu = \kappa[\theta - r] \\ og \\ \sigma = \sigma r^{o} \end{gathered} \tag{5}$$

Vasiceks model fremkommer nu ved at sætte o = 0, κ > 0, og ved endvidere at antage at κ og θ er tidsuafhængige. Processer med egenskaben, at κ ≠ 0 går under navnet Ornstein-Uhlenbeck processer, og når det endvidere antages, at κ > 0 kaldes det for en elastisk-random-walk-proces. Dette medfører, at den endelige prisfunktion får følgende udseende:

$$\frac{\delta P(t,T)}{\delta t} + \frac{\delta P(t,T)}{\delta r}[\kappa[\theta - r] - \lambda\sigma] + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 P(t,T)}{\delta r^2}\sigma^2 = rP(t,T) \tag{6}$$

I denne formel er κ, θ og σ positive konstanter. Den øjeblikkelige drift κ(θ - r) repræsenterer en kraft, som tvinger processen imod dens langsigtede middelværdirenteniveau θ med en kraft proportional i forhold til afstanden fra dette langsigtede middelrenteniveau. κ er en konvergerings-hastigheds-parameter.

Cox, Ingersoll og Ross` model fås derimod ved sætte o = 0.5 og κ ≠ 0. En proces med den nævnte egenskab går almindeligvis under navnet en "square-root" proces. Dette medfører, at Cox, Ingersoll og Ross` model kan formuleres således:

$$\frac{\delta P(t,T)}{\delta t} + \frac{\delta P(t,T)}{\delta r}[\kappa[\theta - r] - \lambda r] + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 P(t,T)}{\delta r^2} r\sigma^2 = rP(t,T) \tag{7}$$

Med kendskab til det ovenstående er det nu muligt at opskrive den relation, der beskriver dynamikken i obligationspriserne, nemlig:

$$\begin{gathered} dP(t,T) = \mu_P P(t,T)dt + \sigma_P P(t,T)dW \\ hvor \\ \mu_P = \left[\mu P_r(t,T) + P_t(t,T) + \frac{1}{2}\sigma^2 P_{rr}(t,T)\right]\frac{1}{P(t,T)} \\ \sigma_P = \frac{\sigma P_r(t,T)}{P(t,T)} \end{gathered} \tag{8}$$

hvor P(t,T) er prisen på tidspunkt t på en nulkuponobligation der udløber på tidspunkt T, og fodtegnene repræsenterer partielle afledte.

4: Forwardprisen - relationen mellem spot- og forwardprisen

Den forventede forwardpris i en verden under fuld sikkerhed om det fremtidige renteniveau er givet ved:

$$F(t,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)} \tag{9}$$

Hvor F(t,T) er den på tidspunkt 0 forventede forwardpris på en fordring der løber fra tidspunkt t til T. P(0,t) og P(0,T) er prisen på tidspunkt 0 på en nulkuponobligation der udløber på henholdsvis tidspunkt t og T. Altså $F(t,T) = E_0[P(t,T)]$, dvs F(t,T) er den forventede spotpris på tidpunkt t, hvor E_0 er forventningsoperatoren for tidspunkt 0.

Validiteten af formel 9 kan nemt indses med kendskab til det risikofri arbitrageargument i en verden under fuld sikkerhed og principperne i en kædeinvestering. Da det eneste formel 9 siger er, at det at investere i en nulkuponobligation der udløber på tidspunkt T, er det samme som at foretage en kædeinvestering i en t-periode nulkuponobligation for derefter at investere det modtagne provenu på tidspunkt t i en nulkuponobligation der har en løbetid lig T-t.

Det interessante spørgsmål, der nu vil være relevant at stille, er - givet dynamikken i spotprisen P hvorledes indvirker dette på dynamikken i forwardprisen F?

Dette spørgsmål kan uddybes lidt mere men kræver først, at den overordnede dynamik i forwardprisen bliver specificeret, således:

$$dF(t,T) = \mu_F F(t,T)dt + \sigma_F F(t,T)dW$$

hvor

$$\mu_F = \left[\mu^F F_{r^F}(t,T) + F_t(t,T) + \frac{1}{2}\sigma^{F^2} F_{r^F r^F}(t,T)\right]\frac{1}{F(t,T)} \tag{10}$$

$$\sigma_F = \frac{\sigma^F F_{r^F}(t,T)}{F(t,T)}$$

hvor μ_F og μ^F er henholdsvis driften i forwardprisen og forwardrenterne, σ_F og σ^F er henholdsvis volatiliteten i forwardprisen og forwardrenterne og r^F er forwardrenterne.

Med kendskab til dette udtryk, er det nu muligt at specificere spørgsmålet lidt yderligere, nemlig - hvilken indvirkning har dynamikken i spotprisen P på forwardprisens drift- og diffusionskoefficient?

Med anvendelse af Itos lemma kan det vises, at forwardprisens dynamik vil kunne skrives således:

$$\begin{aligned} dF(t,T) = {} & (\mu_P(T) - \mu_P(t) - \sigma_P(t)[\sigma_P(T) - \sigma_P(t)])F(t,T)dt \\ & + (\sigma_P(T) - \sigma_P(t))F(t,T)dW \end{aligned} \tag{11}$$

hvor $\mu_P(T)$ og $\mu_P(t)$ er henholdsvis et udtryk for driften i en nulkuponobligation med en løbetid lig T og t. Endvidere er $\sigma_P(T)$ og $\sigma_P(t)$ henholdsvis definitionen af volatiliteten i en nulkuponobligation som udløber på tidspunkt T og t.

I afsnit 2 blev det risikofri arbitrageargument i forbindelse med genereringen af en risikofri-hedge hvad angår spotinstrumenter vist - nemlig formel 4. Det kunne nu være interessant at få undersøgt, hvorledes det risikofri arbitrageargument kommer til at se ud, når det er forwardkontrakter der betragtes.

En metode til direkte at få det risikofri-arbitrage-argument etableret er ved at konstruere en hedgeportefølje bestående af, i dette tilfælde, to forwardkontrakter, se Jamshidian (1990). Jeg vil dog for god ordens skyld gennemgå argumentationen nedenfor.

Betragt nu porteføljen X:

$$X = hF(t,T_1) + (1 - h)F(t,T_2) \tag{12}$$

hvor T_1 og T_2 repræsenterer udløbstidspunkterne på de til de enkelte forwardkontrakter tilhørende underliggende instrumenter.

Dynamikken i denne portefølje kan findes ud fra formel 11. Ved nu at anvende det risikofri arbitrageargument betyder det, at hedge-ratioen h bliver af følgende form:

$$h = \frac{F(t,T_2)\sigma_{F_2}}{F(t,T_2)\sigma_{F_2} - F(t,T_1)\sigma_{F_1}} \tag{13}$$

Dette medfører, at følgende relation må være opfyldt[8]:

$$\frac{\mu_{F_1}}{\sigma_{F_1}} = \frac{\mu_{F_2}}{\sigma_{F_2}} = \lambda_F \tag{14}$$

således at risikopræmien, når det er forwardprisen der betragtes, er givet som det relative forhold imellem forwardprisens forventede afkast og volatilitet.

5: Dynamikken i forwardrentestrukturen

I forrige afsnit blev forwardprisens risikopræmie fundet ved at opstille en risikofri hedgeportefølje. Da jeg er interesseret i at få specificeret dynamikken i den øjeblikkelige

[8] Dette resultat er principielt identisk med HJM`s (1987) condition C.2 "No-pairwise arbitrage opportunities between bonds and the accumulation factor".

forwardrentestruktur og ikke i en enkelt diskret observeret forwardrente, skal den ovenstående gennemgang principielt set betragtes i grænsen $T_1 \to t$ og $T_2 \to T$. Grunden til at jeg er interesseret i den øje-blikkelige forwardrentestruktur er selvfølgelig, fordi jeg vil analysere dynamikken i forwardrenterne i kontinuert tid.

Før jeg starter på den egentlige gennemgang, skal lige et par definitioner opstilles.

P(t,T) repræsenterer prisen på tidspunkt t på en nulkuponobligation der løber til tidspunkt T, for alle $T \in [0,\tau]$ og for alle $t \in [0,T]$, hvor τ principielt set kan betragtes som den maksimale løbetid. Endvidere kræves det, at P(T,T) = 1 hvilket betyder, at på udløbsdagen skal obligationen have en værdi lig den påtrykte værdi.

Den øjeblikkelige forwardrente på tidspunkt t, for T>t, $r^F(t,T)$, er defineret som:

$$r^F(t,T) = -\frac{\delta \ln P(t,T)}{\delta T} \quad ; \textit{for alle } T \in [0,\tau] \textit{ og alle } t \in [0,T] \tag{15}$$

Ud fra formel 15 kan det ses, at $r^F(t,T)$ repræsenterer den rente, som det er muligt at aftale på tidspunkt t på en risikofri investering i en forwardkontrakt som løber fra tidspunkt T til T + α, hvor $\alpha \approx 0$.

Dette betyder, at det er muligt at udtrykke prisen på en T-perioder nulkuponobligation således:

$$P(t,T) = E_t\left[\exp\left(-\int_t^T r^F(t,s)ds\right)\right] \quad ; \textit{for alle } T \in [0,\tau] \textit{ og alle } t \in [0,T] \tag{16}$$

hvor E_t er en forventningsoperator på tidspunkt t.

Endvidere er spotrenten på tidspunkt t givet ved den øjeblikkelige forwardrente på en forwardkontrakt som løber fra t til t + α, hvor $\alpha \approx 0$, dvs:

$$r(t) = r^F(t,t) \quad ; \textit{for alle } t \in [0,\tau] \tag{17}$$

De fire processer, jeg er interesseret i at undersøge sammenhængen imellem, er:

$$dr(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW \tag{18}$$

$$dP(t,T) = \mu_P(t,T)P(t,T)dt + \sigma_P(t,T)P(t,T)dW \tag{19}$$

$$dr^F(t,T) = \mu^F(t,T)dt + \sigma^F(t,T)dW \tag{20}$$

$$dF(t,T) = \mu_F(t,T)F(t,T)dt + \sigma_F(t,T)F(t,T)dW \tag{21}$$

Jeg vil i det efterfølgende nøjes med at beskæftige mig med relationerne imellem spot- og forwardrenteprocesserne samt processen for spotinstrumentet. Endvidere vil jeg referere til de positive koefficienter $\sigma(t)$, $\sigma_P(t,T)$, $\sigma_F(t,T)$ og $\sigma^F(t,T)$ samlet som volatilitetsstrukturen.

Det er indlysende, at der for alle $0 \leq t \leq T \leq \tau$ gælder følgende interne sammenhæng hvad angår de enkelte diffusionskoefficienter[9]:

$$\begin{aligned} \sigma_P(t,T) &= \int_t^T \sigma^F(t,v)dv \\ &og \\ \sigma^F(t,T) &= \frac{\delta\sigma_P(t,T)}{\delta T} \\ &og \\ \sigma(t) &= \sigma^F(t,t) \\ &og \\ \sigma_P(t,t) &= 0 \end{aligned} \tag{22}$$

I forbindelse med disse fire relationer skal her gives en forklaring på, hvorledes det kan være at $\sigma_P(t,t) = 0$. Dette kommer af, at for t = t gælder, at P(t,t) = 1. Der er altså ingen prisusikkerhed som betyder, at volatiliteten må være lig nul (0).

Dette vil have følgende implikation for driftskoefficienten, nemlig:

$$\begin{aligned} \frac{dP(t,t)}{P(t,t)} &= \mu_P(t,t)dt + \sigma_P(t,t)dW \\ &\Rightarrow da\ \sigma_P(t,t) = 0\ fås \\ \frac{dP(t,t)}{P(t,t)} &= \mu_P(t,t)dt = r(t)dt \end{aligned} \tag{23}$$

dvs driften er lig den risikofri rente r(t).

Antagelse nr. 1

P(t,T) siges at være dynamisk arbitragefri hvis:

$$\lambda = \lambda_F \tag{24}$$

Bevis:

[9] Se Jamshidian (1990) side 18.

Følger som en direkte konsekvens af formel 4, 13 og 23.

For at have defineret alle relationerne er det nødvendigt at få bestemt $\mu_P(t,T)$ og $\mu^F(t,T)$. Deres indbyrdes forhold kan formuleres således:

$$\mu_P(t,T) = \int_t^T \mu^F(t,v)dv$$
$$og \qquad \mu^F(t,T) = \frac{\delta\mu_P(t,T)}{\delta T} \tag{25}$$

Ved anvendelse af Itos lemma er det muligt at få opstillet følgende udtryk for $\mu^F(t,T)$:

$$\mu^F(t,T) = -\frac{\delta\mu_P(t,T)}{\delta T} + \sigma_P(t,T)\sigma^F(t,T) \tag{26}$$

Bevis:

$$\mu^F(t,T) = -\frac{\delta[E(\ln P(t,T))]}{\delta T}$$
$$\Rightarrow \mu^F(t,T) = -\frac{\delta\left[\mu_P(t,T) - \frac{1}{2}\sigma_P^2(t,T)\right]}{\delta T} \tag{27}$$
$$\Rightarrow \mu^F(t,T) = -\frac{\delta\mu_P(t,T)}{\delta T} + \sigma_P(t,T)\sigma^F(t,T)$$

Qed[10].

Med udgangspunkt i relationen for formel 29 er det også muligt at få defineret $\mu_P(t,T)$, nemlig:

$$\mu_P(t,T) = r(t) - \int_t^T \mu^F(t,v)dv + \frac{1}{2}\sigma_P^2(t,T) \tag{28}$$

Bevis:

$$\frac{\delta\mu_P(t,T)}{\delta T} = -\mu^F(t,T) + \sigma_P(t,T)\sigma^F(t,T) \tag{29}$$

ved at integrere dette fra t-T med hensyn til T, fås:

[10] Den anden linie i beviset stammer fra en anvendelse af Itos lemma på lnP(t,T).

$$\mu_P(t,T) - \mu_P(t,t) = -\int_t^T \mu^F(t,v)dv + \frac{1}{2}\sigma_P^2(t,T)$$
$$\Rightarrow da\ \mu_P(t,t) = r(t)\ til \tag{30}$$
$$\mu_P(t,T) = r(t) - \int_t^T \mu^F(t,v)dv + \frac{1}{2}\sigma_P^2(t,T)$$

Qed.

Vi er nu i en situation, hvor det er muligt at specificere den stokastiske proces for spotprisen P(t,T), nemlig[11]:

$$dP(t,T) = [r(t) + b(t,T)]P(t,T)dt + \sigma_P(t,T)P(t,T)dW$$
hvor
$$b(t,T) = -\int_t^T \mu^F(t,v)dv + \frac{1}{2}\sigma_P^2(t,T) \tag{31}$$
$$\sigma_P(t,T) = \int_t^T \sigma^F(t,v)dv$$

Det er endvidere med kendskab til, at der er følgende relation imellem spotprisens og forwardprisens drift- og diffusionskoefficient[12],

$$\mu_F(t,T) = \mu_P(t,T) - r(t)$$
$$\sigma_F(t,T) = \sigma_P(t,T) \tag{32}$$

også muligt at få defineret processen for forwardprisen, således:

$$dF(t,T) = b(t,T)F(t,T)dt + \sigma_P(t,T)F(t,T)dW$$
hvor
$$b(t,T) = -\int_t^T \mu^F(t,v)dv + \frac{1}{2}\sigma_P^2(t,T) \tag{33}$$
$$\sigma_P(t,T) = \int_t^T \sigma^F(t,v)dv$$

[11] Hvor det tydeligt ses, at formel 31 er ækvivalent med HJM`s (1991) formel 9.

[12] Se Antagelse nr. 1.

Det er vist af HJM (1991), at prisen på tidspunkt t på en T-perioder nulkuponobligation kan skrives således[13]:

$$lnP(t,T) = lnP(0,T) + \int_0^t [r(s) + b(s,T)]ds - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_P^2(s,T)ds + \int_0^t \sigma_P(s,T)dW(s)$$

hvor

$$b(t,T) = -\int_t^T \mu^F(t,v)dv + \frac{1}{2}\sigma_P^2(t,T) \qquad \textbf{(34)}$$

og

$$\sigma_P(t,T) = \int_t^T \sigma^F(t,v)dv$$

Endvidere kan forwardprisen udtrykkes som:

$$lnF(t,T) = lnF(0,T) + \int_0^t b(s,T)ds - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_P^2(s,T)ds + \int_0^t \sigma_P(s,T)dW(s)$$

hvor

$$b(t,T) = -\int_t^T \mu^F(t,v)dv + \frac{1}{2}\sigma_P^2(t,T) \qquad \textbf{(35)}$$

og

$$\sigma_P(t,T) = \int_t^T \sigma^F(t,v)dv$$

og forwardrentestrukturen på tidspunkt t skrives som:

$$r^F(t,T) = r^F(0,T) + \int_0^t \mu^F(s,T)ds + \int_0^t \sigma^F(s,T)dW(s) \qquad \textbf{(36)}$$

Endelig kan spotrenten på tidspunkt t bestemmes ved at sætte T = t i formel 36, således:

[13] Hvor denne relation er løsningen til den stokastiske proces for spotinstrumentet fra formel 31.

$$r(t) = r^F(0,t) + \int_0^t \mu^F(s,t)ds + \int_0^t \sigma^F(s,t)dW(s) \qquad \textbf{(37)}$$

dvs spotrenteprocessen er identisk med forwardrenteprocessen, på nær at her varierer både tids- og løbetidsargumenterne simultant.

6: Prisfastsættelse i en risiko-neutral økonomi[14]

Lad mig, før jeg begynder at undersøge hvorledes processen for forwardrenterne skal modificeres for at være forenelig med det risikofri-arbitrage-argument, først lige genkalde principperne for ligevægtsmodellerne og prisfastsættelse i en risiko-neutral økonomi.

Hvis man som alternativ til processen for spotrenten fra formel 1 betragter følgende modificeret proces:

$$dr(t) = [\mu - \Gamma]dt + \sigma dW \qquad \textbf{(38)}$$

vil dette resultere i en partiel differentialligning helt magen til den fra formel 6. Hvor formel 38 er den risikoneutrale spotrenteproces, dvs driften er givet ved den risikofri rente.

Dette har den implikation, at forventningsoperatoren til den formelle løsning $P(t,T) = E_t\left[e^{-\int_t^T r(s)ds}\right]$ bliver taget med hensyn til den modificerede stokastiske proces. Det altså sige, at prisen findes i overensstemmelse med Cox-Ross-Mertons risiko-neutrale valueringsargument.

Det skal dog pointeres, at den forventnings-prisfastsættelses-hypotese, som implicit ligger i formel 38, ikke indikerer, at den omhandlende hypotese er valid, men kun er en belejlig formulering helt i stil med det risiko-neutrale valueringsargument for optionsteorien. Det er faktisk således, at den lokale forventningsteori kun er valid for $\Gamma = 0$[15].

Antagelse nr. 2

Det antages, at b(t,T) (se formel 31 og 33) er defineret som:

---

[14] I HJM`s (1991) terminologi, proposition 2-3: "Uniqueness of an equivalent Martingale probability measure or the existence of an equivalent risk neutral economy".

[15] Se Cox, Ingersoll og Ross (1981) afsnit IV for et bevis herfor.

$$b(t,T) = \sigma_P(t,T)\Gamma \quad for\ \Gamma = \lambda \tag{39}$$

Bevis:

Fra antagelse nr. 1 vides, at markedsrisikoparameteren for henholdsvis spotprisen og forwardprisen er defineret som:

$$\begin{gathered} \frac{\mu_P(t,T) - r(t)}{\sigma_P(t,T)} = \lambda \\ og \\ \frac{\mu_P(t,T) - \mu_P(t,t)}{\sigma_P(t,T) - \sigma_P(t,t)} = \lambda_F \end{gathered} \tag{40}$$

hvor $\sigma_P(t,t) = 0$ *og* $\mu_p(t,t) = r(t)$*, således at* $\lambda_F = \lambda$.

Formel 39 følger direkte heraf, da $b(t,T) = \mu_F(t,T) = \mu_P(t,T) - r(t)$.

Qed.

Ved avendelse af formel 31 og 39 fås:

$$\int_t^T \mu^F(t,v)dv = \frac{1}{2}\sigma_P^2(t,T) - \sigma_P(t,T)\Gamma \tag{41}$$

Differentiering af dette udtryk med hensyn til T giver:

$$\begin{gathered} \mu^F(t,T) = \sigma^F(t,T)\sigma_P(t,T) - \sigma^F(t,T)\Gamma \\ \Rightarrow \mu^F(t,T) = \sigma^F(t,T)[\sigma_P(t,T) - \Gamma] \end{gathered} \tag{42}$$

Således at den modificerede proces for forwardrenterne kan skrives således:

$$dr^F(t,T) = [\sigma^F(t,T)[\sigma_P(t,T) - \Gamma]]dt + \sigma^F(t,T)dW \tag{43}$$

Formel 43 er altså den arbitrage-fri forwardrenteproces i en risiko-neutral økonomi. Den er altså pendanten til formel 38 - dvs et udtryk for den arbitrage-fri renteproces i en risiko-neutral verden. Det kan altså udledes, at formel 43 principielt set er Cox-Ross-Mertons risiko-neutrale valueringsargument anvendt på processen for forwardrenterne.

I forbindelse med relationen fra formel 43 er det dog vist af HJM, at ved anvendelse af Girsanovs teori er det muligt at ændre driften for forwardrenteprocessen, således at den

præferenceafhængige parameter (Γ) teknisk set falder bort[16] - nemlig ved alternativt at betragte følgende ækvivalente Wiener proces:

$$d\tilde{W} = dW - \Gamma dt \tag{44}$$

som kaldes for den risiko-neutrale Wiener proces.

Dette resulterer i, at formel 43 kan omskrives således:

$$\begin{aligned} dr^F(t,T) &= \sigma^F(t,T)\sigma_P(t,T)dt + \sigma^F(t,T)d\tilde{W} \\ &= \left(\sigma^F(t,T)\int_t^T \sigma^F(t,v)dv \right) dt + \sigma^F(t,T)d\tilde{W} \end{aligned} \tag{45}$$

som indikerer, at forwardrentestrukturen med hensyn til den risikoneutrale Wiener proces på tidspunkt t kan skrives som:

$$r^F(t,T) = r^F(o,T) + \int_0^t \sigma^F(s,T)\int_s^T \sigma^F(s,v)dvds + \int_0^t \sigma^F(s,T)d\tilde{W}(s) \tag{46}$$

Herefter kan spotrenten findes ved at sætte T = t, således:

$$r(t) = r^F(o,t) + \int_0^t \sigma^F(s,t)\int_s^t \sigma^F(s,v)dvds + \int_0^t \sigma^F(s,t)d\tilde{W}(s) \tag{47}$$

Endvidere kan forwardprisen skrives som:

$$\begin{aligned} lnF(t,T) &= lnF(0,T) + \int_t^T\int_0^t \sigma^F(s,v)\int_s^v \sigma^F(s,y)dydsdv \\ &- \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_P^2(s,T)ds + \int_0^t \sigma_P(s,T)d\tilde{W}(s) \end{aligned} \tag{48}$$

og slutteligt kan prisen på en T-perioders nulkuponobligation udtrykkes som:

[16] For et bevis henvises til Madsen (1995c).

$$lnP(t,T) = lnP(0,T) + \int_0^t r(s)ds + \int_t^T \int_0^t \sigma^F(s,v) \int_s^v \sigma^F(s,y)dydsdv$$
$$- \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_P^2(s,T)ds + \int_0^t \sigma_P(s,T)d\tilde{W}(s) \qquad \textbf{(49)}$$

hvor $\sigma_P(t,T) = \int_t^T \sigma^F(t,v)dv$

Heraf fremgår det tydeligt, at markedsrisikoparameteren er faldet bort og er erstattet med et udtryk (en drift), som kun indeholder volatiliteten over løbetidsspektret, dvs volatilitetsstrukturen. Det har den implikation, at prisfastsættelse af betingede fordringer kan foretages uafhængig af præferencestrukturen[17].

Hvad derimod angår ligevægtsmodellerne, er det vist af CIR (1985) side 398, at der er et interaktivt forhold imellem processen for obligationspriserne, spotrenteprocessen og markedsrisikoparameteren som betyder, at de ikke kan fastlægges isoleret fra hinanden, da der ellers er risiko for, at dette vil kollidere med det risikofri argitrageargument[18]. Endnu et forhold hvad angår ligevægtsmodellerne er, at kravet om specifikke relationer imellem de parametre der indgår i spotrenteprocessen kan resultere i den uheldige egenskab, at prisfastsættelse af betingede fordringer ikke kan foregå uafhængigt af præferencestrukturen[19].

I ligevægtsmodellerne kan en fastlæggelse af risikoparameteren, enten eksplicit (som i CIR-modellen) eller implicit (som i Vasicek-modellen), altså være nødvendig. I arbitragemodellernes framework (HJM) er det derimod muligt at eliminere markedsrisikoparameteren for valueringsudtrykket.

7: Fastlæggelse af volatilitetsstrukturen

For at være i stand til at anvende klassen af HJM-modeller for rentestrukturen i praksis er det nødvendigt at estimere den volatilitetsstruktur, der driver forwardrentestrukturen.

---

[17] Se Madsen (1995c).

[18] I Madsen (1994a) er der i afsnit 5 yderligere anvist, hvorledes relationen skal være imellem risikoparameteren og obligationspris volatiliteten for at de er forenelige med det risikofri arbitrageargument. Jeg angiver altså, hvilke betingelser der skal være opfyldt, for at processen er at betragte som værende arbitragefri. CIR (1985) side 398 foretager principielt set det modsatte i og med, at de giver et eksempel på en arbitrær fastsat risikoparameter som ikke er forenlig med det risikofri arbitrageargument.

[19] Se HJM (1991) afsnit 8 hvor det er vist, at CIR modellen præcis indeholder dette problem. I afsnit 10 vil dette blive nærmere diskuteret og endvidere vil en måde at løse dette problem blive anvist.

Dette betyder principielt, at det er nødvendigt at postulere en eller anden funktionel form for volatilitetsstrukturen.

Det antages her, at volatiliten er deterministisk. For eksempler på modeller, som slækker på denne forudsætning, dvs betragter volatilitesstrukturen i et stokastisk framework, henvises til Longstaff og Schwartz (1991), Vasicek og Fong (1991)[20] og Dupire (1995).

Jeg vil i dette afsnit betragte nogle eksempler på arbitrært fastsatte volatilitetsstrukturer. Der tænkes især på de to tilfælde, der indtil nu i litteraturen har været flittigst citeret, nemlig den kontinuerte tids version af Ho og Lees (1986) model og den arbitragebaserede version af Vasiceks (1977) model, den såkaldte "eksponential" decaying model.

Før jeg starter på at gennemgå forskellige parameteriseringer for volatilitetsstrukturen, er det relevant at opstille udtrykket for en helt generel n-dimensionel forwardrenteprocess. En sådan generel proces kan udtrykkes således:

$$dr^F(t,T) = \mu^F(t,T)dt + \sum_{i=1}^{n} g_i(t,T)[dW_i - \Gamma_i(t)dt] \qquad \textbf{(50)}$$

hvor $\mu^F(t,T)$ og $g_i(t,T)$ er deterministiske funtioner og $\Gamma_i(t)$ er en (eventuel tidsafhængig) markedsrisikoparameter, som kan henføres til den usikkerhed den i´te Wiener proces W_i har på forwardrentestrukturdynamikken. I henhold til forrige afsnit fastlægges $\mu^F(t,T)$ entydigt ud fra volatilitetsstrukturen $g_i(t,T)$. Dette for at gøre de relative obligationspriser til martingales under det risikojusterede sandsynlighedsmål.

Dette betyder altså, at modellen hvad angår prisfastsættelse af betingede fordringer er fuldt specificeret, når $g_i(t,T)$ er fastlagt.

Det fremgår også tydeligt ud fra formel 50, at for at modellen kan betragtes som værende en generel model for obligationsprisdynamikken, kræver det, at den stokastiske proces, der driver risikoparameteren bliver bestemt. Hvis dette ikke gøres, er det nemlig ikke muligt at bestemme det forventede afkast på en given obligation.

Ved omvendt argumentation kan det altså fastslås, at i prisfastsættelsen af betingede fordringer er det ligegyldigt, om man kender driften i det underliggende instrument eller ej. Dette er da også helt identisk med Black og Scholes (1973) formel, hvor driften i aktieprisen ikke indgår i valueringsudtrykket for optionspriserne.

Jeg vil indskrænke mig til at betragte en 3-faktor model (dvs n=3) for bevægelsen i forward-rentestrukturen, dette da alle empiriske undersøgelser der er foretaget på dynamikken i obligationspriserne indikerer, at 3-faktorer stort set er i stand til at forklare hele dynamikken i rentestrukturen, se bl.a. Garbade (1986) og Litterman og Scheinkman (1988) på det

[20] Se Madsen (1995c).

amerikanske marked og Dahl (1989) og Madsen (1995b) på det danske marked.

En sådan 3-faktor model er blevet foreslået af Flesaker (1990a), hvor han postulerer følgende funktionelle former for hver af de 3 g-funktioner:

$$\begin{aligned} g_1(t,T) &= \sigma_1 > 0 \\ g_2(t,T) &= \sigma_2 e^{-\kappa(T-t)} > 0 \\ g_3(t,T) &= \sigma_3 e^{-\kappa_2(T-t-\zeta)^2} > 0 \end{aligned} \tag{51}$$

Denne 3-faktor model kan herefter fastlægges eksplicit ved at estimere den ukendte parametervektor $X = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \kappa, \kappa_2, \zeta\}$ under bibetingelsen, at alle g-funktionerne skal være positive.

Hvad angår den første faktor, $g_1(t,T)$, består dennes indvirkning i additive stød til forwardrentestrukturen. Den anden faktor, $g_2(t,T)$, er hovedsageligt en faktor, som har indvirkning på forwardrentestrukturens "korte" ende, da den går mod nul for $t \to T$. Den tredie faktor, $g_3(t,T)$, har kraftigst indvirkning for obligationer med en løbetid lig ζ og falder for både "korte" og "lange" løbetider.

En generel volatilitetsstruktur, som indeholder en række af de volatilitetsstrukturer der har været foreslået i litteraturen, kan skrives således:

$$\begin{gathered} g(t,T) = \\ [\sigma_0(T-t) + \sigma_1 + \sigma_2 e^{-\kappa(T-t)} + \sigma_3 e^{-\kappa_2(T-t-\zeta)^2}] r^F(t,T)^v \\ for \quad v \in \left(0, \frac{1}{2}, 1\right) \end{gathered} \tag{52}$$

Følgende skema til klassificering af de i litteraturen foreslåede volatilitetsstrukturer kan hermed opstilles:

Volatilitetsstruktur	Funktionel form	Reference
Absolut (Ho og Lee):	$g() = \sigma_1$	HJM (1987)/(1991), Jamshidian (1987), Amin og Morton (1993)
Square-root:	$g() = \sigma_1 r^F(t,T)^{1/2}$	Amin og Morton (1993)
Proportional:	$g() = \sigma_1 r^F(t,T)$	HJM (1990), Amin og Morton (1993)
Lineær absolut:	$g() = \sigma_1 + \sigma_0(T-t)$	Amin og Morton (1993)

Eksponential (Vasicek):	$g() = \sigma_1 \exp[-\kappa(T-t)]$	HJM (1991), Brenner (1989), Jamshidian (1987), Amin og Morton (1993)
Lineær proportional:	$g() = [\sigma_1 + \sigma_0(T-t)]r^F(t,T)$	Amin og Morton (1993)
Lineær eksponential:	$g() = \sigma_1 + \sigma_2 \exp[-\kappa(T-t)]$	HJM (1991)
Lineær udvidet eksponential:	$g() = \sigma_1 + \sigma_2 \exp[-\kappa(T-t)] + \sigma_3 \exp[-\kappa_2(T-t-\zeta)^2]$	Flesaker (1990a)

Inden for rammerne givet ved formel 52 er det selvfølgelig muligt at konstruere flere forskellige volatilitetsstrukturer end de ovenfor anviste. Eksempelvis kunne nævnes en lineær proportional eksponential volatilitetsstruktur, som i den henseende vil kunne udtrykkes således:

$$\begin{gathered} \textit{lineær proportional eksponential}: \\ g() = [\sigma_1 + \sigma_2 e^{-\kappa(T-t)}]r^F(t,T) \end{gathered} \tag{53}$$

Hvor dette udtryk fremkommer ved i formel 52 at sætte v = 1, σ_0 og $\sigma_3 = 0$.

Hvis nu jeg vender tilbage til den 3-faktor volatilitetsmodel som er defineret ved formel 51, kan der opstilles følgende udtryk for dynamikken i forwardrentestrukturen:

$$\begin{aligned} dr^F(t,T) &= \mu^F(t,T)dt + \sigma_1 d\tilde{W}_1(t) + \sigma_2 e^{-\kappa(T-t)} d\tilde{W}_2(t) \\ &\quad + \sigma_3 e^{-\kappa_2(T-t-\zeta)^2} d\tilde{W}_3(t) \end{aligned} \tag{54}$$

Det vides fra afsnit 6, at forwardrentestrukturens risikoneutrale drift kan udtrykkes ved volatilitetsstrukturen, som for nærværende model kan vises at blive af følgende form:

$$\begin{aligned} \mu^F(t,T) &= \sigma^F(t,T)\int_t^T \sigma^F(t,v)dv \\ &= \sigma_1^2(T-t) + \frac{\sigma_2^2}{\kappa} e^{-\kappa(T-t)}[1 - e^{-\kappa(T-t)}] \\ &\quad + \sigma_3^2 \sqrt{\frac{2\pi}{\kappa_2}} e^{-\kappa_2(T-t-\zeta)^2} \left[N\left(\sqrt{\frac{\kappa_2}{2}}(T-t-\zeta) \right) - N\left(\sqrt{\frac{\kappa_2}{2}}(-\zeta) \right) \right] \end{aligned} \tag{55}$$

Hvor N(.) er den standardiserede normalfordeling.

Denne 3-dimemsionelle forwardrentestrukturmodel er identisk med den model, som blev foreslået af Flesaker (1990a).

I forbindelse med specifikation af en eller anden stokastisk rentestrukturmodel er det ikke tilstrækkeligt bare at specificere driften for spotrenten, som i Vasicek modellen, da der er et interaktivt forhold imellem risikoparameteren og spotrenteprocessen som gør, at de ikke kan vælges uafhængigt af hinanden.

Det er nemlig muligt, som vil blive vist nedenfor, at konstruere en O-U proces for spotrenten ved anvendelse af den kontinuerte tids version af Ho og Lee modellen ved et passende valg af funktionel form for risikoparameteren.

Nedenfor vil jeg yderligere vise, at hvis volatilitetsstrukturen i HJM`s framework bliver specificeret som den ovenfor såkaldte eksponential model, vil det resultere i en prisfunktion af nøjagtig samme udseende som den udledt af Vasicek.

Lad os nu først betragte følgende HJM model:

$$dr^F(t,T) = (\sigma_1^2(T - t) - \sigma_1\Gamma)dt + \sigma_1 dW_1(t) \tag{56}$$

Der som vist af bl.a. HJM (1987) er den kontinuerte tids version af Ho og Lees model. De viser yderligere, at Ho og Lee modellen kun vil konvergere til en sin kontinuerte tids grænse, hvis binomialsandsynligheden er identisk med den risikoneutrale sandsynlighed. Det kan altså konkluderes, at Ho og Lees model kan betragtes som en model, der fungerer under risikoneutralitet - dette blev også nævnt indledningsvis.

Forwardrentestrukturen vil med udgangspunkt i formel 36 kunne skrives således:

$$\begin{aligned} r^F(t,T) &= r^F(0,T) + \int_0^t \mu^F(s,T)ds + \int_0^t \sigma^F(s,T)dW(s) \\ &= r^F(0,T) - \sigma_1\int_0^t \Gamma ds + \sigma_1^2 t\left(T - \frac{t}{2}\right) + \sigma_1\int_0^t dW_1(s) \end{aligned} \tag{57}$$

Dette betyder, at spotrenten får følgende udseende:

$$r^F(t,t) = r^F(0,t) - \sigma_1\int_0^t \Gamma ds + \frac{\sigma_1^2 t^2}{2} + \sigma_1\int_0^t dW_1(s) \tag{58}$$

Vasicek antager i sin model, at spotrenten følger en Ornstein-Uhlenbeck proces, således:

$$dr^F(t,t) = \kappa(\theta - r^F(t,t))dt + \sigma dW \tag{59}$$

I denne formel er κ, θ og σ, som nævnt tidligere, positive konstanter.

Ved at antage at markedsrisikoparameteren er konstant, kan følgende funktionelle form for prisen på en T-perioder nulkuponobligation udledes:

$$
\begin{aligned}
& P(t,T) = e^{(A(\tau)r^F(t,t) + B(\tau))} \\
& hvor \quad A(\tau) = \frac{e^{-\kappa\tau} - 1}{\kappa} \\
& og \quad B(\tau) = \frac{R(\infty)}{\kappa}(1 - e^{-\kappa\tau}) - R(\infty)\tau - \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{\kappa^3}(1 - e^{-\kappa\tau})^2 \\
& for \quad R(\infty) = \theta - \frac{\lambda\sigma}{\kappa} - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\kappa^2}
\end{aligned}
\tag{60}
$$

Hvor τ repræsenterer restløbetiden, dvs T-t.

Med kendskab til at der er følgende relation imellem forwardrentestrukturen og obligationspriserne:

$$
r^F(t,T) = -\frac{\delta \ln P(t,T)}{\delta T} \tag{61}
$$

finder man følgende udtryk for $r^F(t,T)$:

$$
\begin{aligned}
r^F(t,T) &= -r^F(t,t)\frac{\delta A(t,T)}{\delta T} - \frac{\delta B(t,T)}{\delta T} \\
&= R(\infty) - [R(\infty) - r^F(t,t)]e^{-\kappa(T-t)} + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\kappa^2}e^{-\kappa(T-t)}[1 - e^{-\kappa(T-t)}]
\end{aligned}
\tag{62}
$$

Hvis Itos lemma anvendes på dette udtryk, finder man den for Vasiceks model implicitte stokastiske proces, der driver forwardrentestrukturen, således[21]:

$$
\begin{aligned}
dr^F(t,T) = & \left(\frac{\sigma^2}{\kappa}e^{-\kappa(T-t)}[1 - e^{-\kappa(T-t)}] - \lambda\sigma e^{-\kappa(T-t)} \right) dt \\
& + \sigma e^{-\kappa(T-t)} dW
\end{aligned}
\tag{63}
$$

For λ = Γ, dvs markedsrisikoparameteren er en konstant.

---

[21] Hvis læseren selv skulle finde på at foretage denne udledning, vil han/hun opdage at jeg har skiftet fortegn på leddet indeholdende lambda. Forklaringen på at dette fortegnsskift er tilladt, er, at min R(∞) afviger fra Vasiceks originale R(∞) på den måde, at han har et plus foran leddet indeholdende lambda. Grunden til at jeg har et minus her stammer helt tilbage til specifikationen af processen der driver obligationspriserne, hvor Vasicek udtrykker $dP = \mu_P dt - \sigma_P dW$, hvorimod jeg udtrykker $dP = \mu_P dt + \sigma_P dW$. Hermed kan det ind
tilladt.

Ved at betragte dette udtryk ses det, at den implicitte volatilitetsspecifikation for forwardrentestrukturen er identisk med den eksplicitte fastsatte volatilitetsspecifikation fra HJM`s eksponential model.

Det spørgsmål der nu klart stiller sig er, om Vasiceks implicitte drift for forwardrenterne er identisk med driften fra HJM`s eksponentiale volatilitetsmodel.

Det kan nemt vises at være tilfældet, således:

$$\begin{aligned} E_t[dr^F(t,T)] &= \left[\sigma^F(t,T)\int_t^T \sigma^F(t,v)dv - \sigma^F(t,T)\Gamma\right]dt \\ &= \frac{\sigma^2}{\alpha}e^{-\alpha(T-t)}[1 - e^{-\alpha(T-t)}] - \sigma e^{-\alpha(T-t)}\Gamma \end{aligned} \tag{64}$$

Hvor det tydeligt fremgår, at for $\lambda = \Gamma$ er de 2 specifikationer identiske, dvs Vasiceks model opfylder HJM`s driftspecifikation.

Hvis nu processen for spotrenten fra formel 59 betragtes, medfører det, at spotrenten kan findes således:

$$r^F(t,t) = r^F(0,t) + \int_0^t \kappa[\theta - r^F(s,t)]ds + \sigma\int_0^t dW(s) \tag{65}$$

Lad mig nu genkalde spotrentefunktionen, som fremkommer ved anvendelse af den kontinuerte tids version af Ho og Lees model fra formel 58, således:

$$r^F(t,t) = r^F(0,t) - \sigma_1\int_0^t \Gamma ds + \frac{\sigma_1^2 t^2}{2} + \sigma_1\int_0^t dW_1(s) \tag{66}$$

Dette indikerer, at for $W(t) = W_1(t)$ og $\sigma = \sigma_1$, og ved i formel 66 at sætte :

$$\int_0^t \Gamma ds = \left[\frac{\sigma^2 t^2}{2} - \int_0^t \kappa[\theta - r^F(s,t)]ds\right]\frac{1}{\sigma} \tag{67}$$

vil det resultere i, at spotrenten følger en Ornstein-Uhlenbeck proces.

Ud fra det ovenstående kan det konkluderes, at en isoleret fastlæggelse af den proces der driver spotrenterne ikke vil være tilstrækkelig til at identificere en specifik proces.

En entydig og specifik proces kræver nemlig, at processen der driver enten

forwardrentestrukturen eller spotrenten fastlægges eksplicit samtidig med, at den stokastiske proces der driver risikopræmieparameteren også bliver defineret.

Endnu et forhold kan udledes ud fra det ovenstående, og det er, at der ikke er nødvendigt at specificere mean-reversion, da mean-reversion kan opnås ved passende valg af volatilitets-struktur.

8. Duplikering af Præferencestrukturen

Prisen på en nulkuponobligation i en m-faktor-model, under hensyntagen til at der er uafhængighed mellem de enkelte Wiener processer for rentestrukturdynamikken, kan findes ved anvendelse af formel 16, således:

$$\begin{aligned} P(t,T) &= \exp\left[-\int_t^T r^F(0,y)dy - \sum_{i=1}^m \int_t^T\int_0^t \sigma^F(s,v;i)\int_s^v \sigma^F(s,y;i)dydsdv\right] \\ &\quad \times \exp\left[-\sum_{i=1}^m \int_t^T\int_0^t \sigma^F(s,v;i)d\tilde{W}_i(s)dv\right] \\ hvor \quad d\tilde{W}_i(s) &= dW_i(s) - \Gamma_i(s) \end{aligned} \tag{68}$$

Hvor dette udtryk kan omskrives således:

$$\begin{aligned} P(t,T) &= \frac{P(0,T)}{P(0,t)}\exp\left[-\sum_{i=1}^m \int_t^T\int_0^t \sigma^F(s,v;i)\int_s^v \sigma^F(s,y;i)dydsdv\right] \\ &\quad \times \exp\left[-\sum_{i=1}^m \int_t^T\int_0^t \sigma^F(s,v;i)d\tilde{W}_i(s)dv\right] \\ &= \frac{P(0,T)}{P(0,t)}\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m \int_0^t \sigma_P^2(s,T;i)ds - \sum_{i=1}^m \int_0^t \sigma_P(s,T;i)d\tilde{W}_i(s)\right] \end{aligned} \tag{69}$$

Hvis nu det antages, at de enkelte led i for i ε {1,2,...,m} i volatilitetsstrukturen kan faktoreres op i to dele, hvor den ene del afhænger af det aktuelle tidspunkt t, og den anden del afhænger af løbetiden T, således[22]:

$$\sigma^F(t,T;i) = h(t;i)H(T;i) \qquad for\ alle\ i\ \varepsilon\ [1,2,...,m] \tag{70}$$

er det muligt at omskrive formlen for obligationsprisen på følgende måde:

[22] Hvor dette præcis er tilfældet, hvis volatilitetsstrukturen skal opfylde Markov egenskaben, se Madsen (1995c) for et bevis heraf.

$$P(t,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)} \exp\left[-\sum_{i=1}^{m} \int_t^T \int_0^t h(s;i)^2 H(v;i) \int_s^v H(y;i)\,dy\,ds\,dv \right] \times \exp\left[-\sum_{i=1}^{m} \int_t^T H(v;i) \int_0^t h(s;i)\,d\tilde{W}_i(s)\,dv \right] \tag{71}$$

Det, at volatilitetsstrukturen kan opdeles på ovennævnte måde, er af Brenner (1989) vist er betingelsen for, at den ukendte parametervektor, som beskriver volatilitetsstrukturen, kan estimeres ved anvendelse af eksempelvis observerbare obligationspriser.

Måden denne estimation i praksis gribes an på er ved at prisfastsætte P(t,T) som en funktion af andre obligationer $P_i(t,K)$, for i ε {1,2,...,m}. Hvor m er antallet af obligationer anvendt til at estimere parametervektoren og K er en vektor af m-unikke løbetider. Disse obligationer $P_i(t,K)$ kan i den forbindelse betragtes som en slags "benchmark"-portefølje, forstået på den måde, at de obligationer som udvælges **skal** være prisfastsat "korrekt"[23].

Dette medfører altså, at givet volatilitetsstrukturen kan opsplittes efter formel 70, er det muligt at prisfastsætte obligationer uden at foretage nogen som helst antagelser omkring risikopræmieparameteren. Obligationer kan altså i dette framework, under visse betingelser, også prisfastsættes "uafhængigt" af præferencestrukturen. Principielt foretages prisfastsættelsen her relativt - dvs at obligationer prisfastsættes relativt i forhold til prisen på fordringerne i denne "benchmark"-portefølje. Denne "benchmark"-portefølje kommer derfor til at fungere som den i markedet observerbare præferencestruktur.

En uheldig egenskab ved denne fremgangsmåde er selvfølgelig det forhold, at formel 70 sætter en række restriktioner på valg af funktionel form for volatilitetsstrukturen. Eksempelvis kan det nævnes, at den lineær udvidet eksponential model ikke opfylder dette krav, da det ikke er muligt at foretage opsplitningen fra formel 70 på leddet $\sigma e^{-\kappa(T-t-\varsigma)^2}$.

Antagelse nr. 3

Givet at volatilitetsstrukturen opfylder kriteriet fra formel 70 kan obligationsprisen udtrykkes på følgende form:

[23] I praksis er problemet, at der ikke kan observeres nulkuponobligationer med en længere løbetid end 9 måneder. For at kunne anvende denne metode i praksis er det derfor nødvendigt at estimere disse nulkuponpriser, der skal anvendes, med de deraf afledte problemer se bl.a. Madsen (1994b).

$$P(t,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)}\exp\left[-\sum_{i=1}^{m}\int_t^T\int_0^t h(s;i)^2 H(v;i)\int_s^v H(y;i)\,dy\,ds\,dv\right]$$
$$\times \exp\left[-\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\int_t^T H(v;i)\,dv}{\int_t^K H(v)\,dv} \times \left[dR_i(t,K) - \int_t^K\int_0^t h(s;i)^2 H(v;i)\int_s^v H(y;i)\,dy\,ds\,dv\right]\right]\right] \quad \textbf{(72)}$$

Bevis:

Ud fra formel 71 kan følgende relation udledes:

$$\sum_{i=1}^{m}\int_t^T\int_0^t h(s;i)\,d\tilde{W}_i(s) = \sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\ln\left(\frac{P(0,T)}{P(0,t)P(t,T)}\right) - \int_t^T\int_0^t h(s;i)^2 H(v;i)\int_s^v H(y;i)\,dy\,ds\,dv}{\int_t^T H(v;i)\,dv}\right] \quad \textbf{(73)}$$

Lad der nu eksistere en portefølje af m-nulkuponobligationer $P_i(t,K)$ for i ε {1,2,...,m} - den såkaldte "benchmark"-portefølje.

Forskellen mellem den forventede effektive nulkuponrente og den realiserede effektive nulkuponrente på tidspunkt t for en nulkuponobligation, der udløber på tidspunkt K, er givet ved $dR_i(t,K) = \ln\left(\frac{P_i(0,K)}{P(0,t)}\right) - \ln P_i(t,K)$ $\quad \ln\left(\frac{P(0,K_i)}{P(0,t)}\right) = E_0[R(t,K_i)]$ *, hvor med den forventede effektive nulkuponrente.*

I og med at venstre side (det stokastiske led) i formel 73 er uafhængig af restløbetiden, betyder dette, at det stokastiske led kan blive udtrykt ved priserne på en portefølje af nulkuponobligationer på tidspunkt 0 og t samt volatilitetsstrukturen.

Dette betyder altså, at det stokastiske led i formel 73 kan duplikeres ved anvendelse af minimum en m-dimensionel "benchmark"-portefølje, således:

$$\sum_{i=1}^{m}\int_t^T\int_0^t h(s;i)\,d\tilde{W}_i(s) = \sum_{i=1}^{m}\left[\frac{dR_i(t,K) - \int_t^K\int_0^t h(s;i)^2 H(v;i)\int_s^v H(y;i)\,dy\,ds\,dv}{\int_t^K H(v;i)\,dv}\right] \quad \textbf{(74)}$$

Ved indsættelse af denne relation i formel 71 følger formel 72 direkte, hvilket hermed fuldfører beviset.

Qed.

Ud fra formel 72 følger direkte, at det ved anvendelse af en "benchmark"-portefølje $P_i(t,K)$, for
i ε {1,2,...,m} er muligt at estimere parametrene i en prædefineret volatilitetsstruktur uden kendskab til præferencestrukturen. Det skal her pointeres, som også nævnt ovenfor, at antal fordringer i "benchmark"-porteføljen minimum skal være lig med antal ukendte parametre[24].

9. Fastlæggelse af den implicitte Volatilitetsstruktur[25]

I dette afsnit vil jeg kigge nærmere på de ligevægtsbaserede modeller for at undersøge, hvorledes den implicitte volatilitetsstruktur optræder. Dette vil jeg gøre i et generelt framework for herefter at vise, hvorledes volatilitetsstrukturen er i nogle specifikke rentestrukturmodeller.

I den forbindelse er jeg specielt interesseret i den klasse af rentestrukturmodeller, som medfører, at der eksisterer en analytisk løsning for obligationspriser.

Den klasse af rentestrukturmodeller, jeg her vil betragte, er dem, hvor prisfunktionen kan skrives på følgende form:

$$P(t,T) = e^{B(\tau) + A(\tau)r} \qquad \textbf{(75)}$$

Hvor τ er restløbetiden, dvs T-t.

Pga. randbetingelsen, som for obligationer siger at P(T,T) = 1, betyder dette endvidere, at A(T,T) = B(T,T) = 0.

Denne parametriske klasse af modeller kaldes for eksponentielle affine rentestrukturmodeller[26].

---

[24] I Appendix A er der vist, hvorledes dette estimationsprincip kommer til at se ud, hvis det er Vasiceks volatilitetsstruktur der betragtes. Der bliver her vist, at det alternativt er muligt at anvende spotrenten som duplikeringsparameter for præferencestrukturen i en en-faktor model.

[25] Alle de ligevægtsmodeller, der bliver betragtet i dette afsnit, er behandlet mere uddybende i Madsen (1995a), hvortil der henvises for yderligere information.

[26] Se bl.a. Brown og Schaefer (1991) og Duffie (1993).

Denne generelle formulering indeholder bl.a. Cox, Ingersoll og Ross (1985) og Vasicek (1977) modellerne.

Givet relationen fra formel 75 er det endvidere muligt at finde rentestrukturen således:

$$R(t,T) = -\frac{B(\tau)}{\tau} - \frac{A(\tau)r}{\tau} \tag{76}$$

og forwardrentestrukturen som:

$$r^F(t,T) = -B_T(\tau) - A_T(\tau)r \tag{77}$$

$$\begin{aligned} dP(t,T) &= \left[\frac{\delta P(t,T)}{\delta t} + \frac{\delta P(t,T)}{\delta r}\mu + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 P(t,T)}{\delta r^2}\sigma^2 r^{2o}\right] dt \\ &\quad + \frac{\delta P(t,T)}{\delta r} r^o \sigma dW \\ \textit{og} \quad dr &= \kappa[\theta - r]dt + \sigma r^o dW \\ \textit{hvor} & \\ & o \in [0;\tfrac{1}{2}] \end{aligned} \tag{78}$$

Betragt nu følgende generelle proces for obligationspriserne i en en-faktor rentestrukturmodel: Ved anvendelse af det risikofri arbitrageargument kan den søgte parabolske differentialligning, som alle fordringer P(t,T) skal tilfredstille for at udelukke arbitrage muligheder, formuleres som:

$$\begin{aligned} &\frac{\delta P(t,T)}{\delta t} + \frac{\delta P(t,T)}{\delta r}\mu_M + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 P(t,T)}{\delta r^2} r^{2o}\sigma^2 \\ &\qquad - rP(t,T) = 0 \\ \textit{hvor} & \\ &\mu_M = \mu - \Gamma \end{aligned} \tag{79}$$

Ved at anvende formel 75 på 79 og ved samtidig at antage μ_M og σ er tids-homogene, fås:

$$-B_\tau(\tau) - A_\tau(\tau)r + A(\tau)\mu_M + \frac{1}{2}A^2(\tau)r^{2o}\sigma^2 - r = 0 \tag{80}$$

Hvor dette betyder, at forwardrentestrukturen kan skrives som:

$$r^F(t,T) = r - A(\tau)\mu_M - \frac{1}{2}A^2(\tau)r^{2o}\sigma^2 \tag{81}$$

Herudfra er det indlysende, at $A(\tau)$ har en ikke ubetydelig indflydelse på rentestrukturens udseende. Det skal yderligere nævnes, at ved anvendelse af eksempel Vasiceks udtryk for driften μ og for o=0, og ved derefter at indsætte udtrykket for den risikoneutrale drift μ_M, vil dette resultere i, at formlen bliver af samme udseende som formel 62, da det som bekendt er således, at $r = r^F(t,t)$.

Ved anvendelse af relationen for spotrentestrukturen fra formel 76 kan det bl.a. udledes, at udseendet for volatilitetsstrukturen for spotrentestrukturen er fundamentalt defineret ved $A(\tau)$, således[27]:

$$\sigma_R(t,T) = \sigma r^o \frac{\delta R(t,T)}{\delta r} = -\frac{A(\tau)}{\tau}\sigma r^o \qquad \textbf{(82)}$$

Hvor det tydeligt fremgår, at $-A(\tau)\sigma r^o$ kan betragtes som et varighedsmål - dvs et udtryk for volatiliteten i obligationspriserne. Endvidere viser formel 82 også, at relationen mellem pris- og rentevolatilitet generelt kan skrives som:

$$\sigma_R(t,T) = \frac{\sigma_P(t,T)}{D_\tau} \qquad \textbf{(83)}$$

hvor D_τ er varigheden på tidspunkt t på en nulkuponobligation, der udløber på tidspunkt T.

Hvis nu Cox, Ingersoll og Ross´ model betragtes i dette framework vides det, at $-A(\tau)$ og $B(\tau)$ har følgende udseende:

[27] Måden at indse, at denne relation er korrekt, er ved at huske, at spotrentestrukturens volatilitet for Vasicek modellen er givet ved følgende relation:

$$\sigma_P(t,T) = \int_t^T \sigma^F(t,v)dv = \frac{\sigma}{\kappa}[1 - e^{-\kappa\tau}]$$

som indikerer, at A(T-t) i Vasicek modellen har følgende udseende:

$$A(\tau) = \frac{1}{\kappa}[e^{-\kappa\tau} - 1]$$

$$
\begin{aligned}
&B(\tau) = \varphi_3 \ln\left[\frac{\varphi_1 e^{\varphi_2 \tau}}{\varphi_2\left(e^{\varphi_1 \tau} - 1\right) + \varphi_1}\right] \\
&og \\
&\quad -A(\tau) = \frac{e^{\varphi_1 \tau} - 1}{\varphi_2\left(e^{\varphi_1 \tau} - 1\right) + \varphi_1} \\
&for \\
&\quad \varphi_1 = \sqrt{(\alpha + \lambda)^2 + 2\sigma^2} \\
&\quad \varphi_2 = \frac{1}{2}\left(\alpha + \lambda + \varphi_1\right) \\
&\quad \varphi_3 = \frac{2\alpha\beta}{\sigma^2}
\end{aligned}
\tag{84}
$$

Ved anvendelse af udtrykket for forwardrenterne fra formel 81, og vel vidende at o = 0.5 og $\Gamma = \lambda r$ for CIR-modellen, er det muligt at finde et udtryk for forwardrentestrukturen. Den proces der driver forwardrentestrukturen findes herefter ved anvendelse af Itos lemma og giver følgende resultat:

$$
\begin{aligned}
&dr^F(t,T) = \\
&\left(\frac{\delta A(\tau)}{\delta t}\mu_M - \mu[A(\tau)(\kappa + \lambda) + 1] - \frac{1}{2}\sigma^2 r \frac{\delta A^2(\tau)}{\delta t} - \frac{1}{2}\sigma^2 A^2(\tau)\mu_M\right) dt \\
&\quad - \sigma\sqrt{r}\left(A(\tau)(\kappa + \lambda) + \frac{1}{2}\sigma^2 A^2(\tau) + 1\right) dW
\end{aligned}
\tag{85}
$$

Heraf fremgår det tydeligt, at volatilitetsstrukturen indeholder risikoparameteren λ, som har den implikation, at det ikke er muligt at prisfastsætte afledte fordringer uden forudgående kendskab til præferencestrukturen.

Det er endvidere heller ikke umiddelbart indlysende, om CIR-modellen opfylder betingelserne for fastlæggelse af driften i HJM´s framework. Jeg skal dog ikke her prøve på at kontrollere dette, da CIR-modellen under alle omstændigheder ikke er forenelig med de basale antagelser i HJM´s framework. Dette eftersom prisfastsættelse af afledte instrumenter ikke kan foregå uden forudgående kendskab til præferencestrukturen[28].

Ud fra det foregående kan det konkluderes, at volatilitetsstrukturen for forwardrentestrukturen for henholdsvis Vasicek -og CIR-modellerne har følgende udseende:

[28] Se HJM (1991) afsnit 8.

$$\sigma_V^F(t,T) = \sigma e^{-\kappa\tau}$$

og

$$\sigma_{CIR}^F(t,T) = \sigma\sqrt{r}\left(A(\tau)(\kappa + \lambda) + \frac{1}{2}A^2(\tau)\sigma^2 + 1\right) \tag{86}$$

Disse volatilitetsstrukturer kan imidlertid også findes på en mere intuitiv måde ved direkte anvendelse af formel 80.

Det er nemlig således, at løsningen af relationen fra formel 80 kræver, at alle de led som er en funktion af r er lig nul samtidig med, at de resterende led også er lig nul[29].

Lad mig først skrive formel 80 helt ud:

$$\begin{aligned} -B_\tau(\tau) - A_\tau(\tau)r + A(\tau)\kappa\theta - A(\tau)\kappa r - A(\tau)\Gamma \\ + \frac{1}{2}A^2(\tau)r^{2o}\sigma^2 - r = 0 \end{aligned} \tag{87}$$

Vasiceks model findes ved at sætte $\Gamma = \lambda\sigma$ og o = 0. Hvorimod for CIR gælder, at $\Gamma = \lambda r$ og o = 0.5.

Dette betyder, at volatiliteten i forwardrentestrukturen kan skrives som[30]:

$$\begin{aligned} \sigma^F(t,T) &= -A_T(\tau)\sigma r^o \\ &= \left[\frac{\left[A(\tau)\kappa r + A(\tau)\Gamma - \frac{1}{2}A^2(\tau)r^{2o}\sigma^2 + r\right]}{r}\right]\sigma r^o \end{aligned} \tag{88}$$

og dermed volatiliteten i obligationspriserne:

$$\sigma_P(t,T) = -\left[\int_t^T A_s(t,s)ds\right]r^o\sigma \tag{89}$$

og volatiliteten i rentestrukturen kan hermed skrives som:

[29] Se Madsen (1995a).

[30] Det er selvfølgelig således, at kun de led i denne relation som indeholder r er relevante, de resterende falder principielt bort.

$$\sigma_R(t,T) = -\frac{1}{D_\tau}\left[\int_t^T A_s(t,s)ds\right] r^o\sigma \tag{90}$$

hvor σr^o er volatiliteten i spotrenten.

Det er selvfølgelig også muligt at opstille et udtryk for den implicitte volatilitetsstruktur i andet end en-faktor rentestrukturmodeller. Hvis nu der eksempelvis betragtes den klasse af to-faktormodeller, hvorom det gælder, at prisfunktionen kan skrives på følgende form

$$P(t,T) = e^{C(\tau) + A(\tau)X_i(t) + B(\tau)X_2(t)} \tag{91}$$

Hvor $\tau = T-t$, dvs er et udtryk for restløbetiden, og $X_i(t)$ for $i=\{1,2\}$ er den øjeblikkelige værdi af tilstandsvariablene. I den forbindelse kan forwardrentestrukturen udtrykkes således:

$$r^F(t,T) = -C_T(\tau) - A_T(\tau)X_1(t) - B_T(\tau)X_2(t) \tag{92}$$

En række modeller passer ind i dette framework, bl.a. Longstaff og Schwartz (1991), Vasicek og Fong (1991) og Longstaff (1989). Det skal dog påpeges, at Longstaff (1989) modellen ikke er en to-faktor model, men derimod en en-faktor ikke-lineær rentestrukturmodel.

Som nævnt tidligere i dette afsnit er det også muligt at finde forwardrentestrukturen ved at tage udgangspunkt i den søgte parabolske differentialligning, som alle fordringer P(t,T) skal tilfredsstille for at udelukke arbitragemuligheder.

Hvis nu eksempelvis Vasicek og Fong modellen betragtes, kan det vises, at forwardrentestrukturen kan udtrykkes på følgende måde, hvis der tages udgangspunkt i den endelige partielle differentialligning:

$$\begin{aligned} r^F(t,T) = {} & -A(\tau)r - B(\tau)V - A(\tau)\lambda_r V - B(\tau)\lambda_V\xi V \\ & + \frac{1}{2}A(\tau)^2V + \frac{1}{2}B(\tau)^2\xi^2V + A(\tau)B(\tau)\xi V\rho - r \end{aligned} \tag{93}$$

hvor $dr = \kappa(\theta-r)dt + V^{0.5}dW_1$ og $dV = \gamma(\omega- V)dt + \xi V^{0.5}dW_2$ og ρ er et udtryk for korrelationen imellem de to Wiener processer dW_i, for $i=\{1,2\}$. Alternativt vil forwardrentestrukturen for Longstaff modellen have følgende udseende:

$$r^F(t,T) = -\left[A(\tau) + \frac{1}{2}\frac{B(\tau)}{\sqrt{r}}\right][\kappa\sqrt{r} + 2\lambda r] - \frac{1}{8}\frac{\sigma^2 B(\tau)}{\sqrt{r}}\left[A(\tau) + \frac{1}{2}\frac{B(\tau)}{\sqrt{r}}\right]^2 - r \qquad \textbf{(94)}$$

hvor $dr = (\sigma^2/4 - \kappa r^{0.5})dt + \sigma r^{0.5}dW$.

På tilsvarende måde kunne udtrykket for forwardrentestrukturen hvad angår Longstaff og Schwartz modellen også opstilles, dette vil dog af pladshensyn ikke blive gjort her.

Volatiliteten i rentestrukturen for Longstaff modellen for $X_1(t) = r$ og $X_2(t) = r^{0.5}$ kan skrives således:

$$\begin{aligned}\sigma_R(t,T) &= -\sigma\sqrt{r}\left[\frac{A(\tau)}{\tau} + \frac{1}{2}\frac{B(\tau)}{\tau\sqrt{r}}\right] \\ &= -\frac{A(\tau)}{\tau}\sigma\sqrt{r} - \frac{1}{2}\frac{B(\tau)}{\tau}\sigma\end{aligned} \qquad \textbf{(95)}$$

Hvis dette udtryk sammenlignes med formel 82, ses det tydeligt, at ulineariteten har den implikation hvad angår spotrentestrukturens volatilitet, at der er et ekstra led som fungerer som modellens ulinearitets afsmittende indvirkning på volatilitetsstrukturen. Med dette udtryk i hånden er det efterfølgende, med kendskab til de tidligere udledte relationer, relativt simpelt at finde udtrykket for volatiliteten i henholdsvis obligationspriserne og forwardrenterne. Dette vil dog ikke blive gjort her, da den principielle forståelse af denne grund ikke vil blive bedre.

Hvis det derimod er volatiliteten i spotrentestrukturen, for disse to to-faktor modeller, man ønsker at finde, vil det indledningsvis være interessant at starte med at betragte de partielle afledte af R(t,T) med hensyn til henholdsvis r (den risikofri rente) og V (volatiliteten i den risikofri rente). Dette vil for tilfældet Longstaff og Schwartz modellen kunne udtrykkes sådan[31]:

$$\begin{aligned}\sigma_R(r,t,T) &= -\frac{A(\tau)}{\tau}[\sqrt{\eta r + \xi V} + \sqrt{(1-\xi)V - \eta r}] \\ &\textit{og} \\ \sigma_R(\sigma,t,T) &= -\frac{B(\tau)}{\tau}\left[\frac{\eta}{1-\xi}\sqrt{\eta r + \xi V} - \frac{\eta}{\xi}\sqrt{(1-\xi)V - \eta r}\right]\end{aligned} \qquad \textbf{(96)}$$

Hvor $\sigma_R(r,t,T)$ og $\sigma_R(\sigma,t,T)$ skal indikere, at prisfunktionen er blevet differentieret med hensyn

[31] Udtrykket for rentestrukturens følsomhed over for ændringer i volatiliteten er fremkommet ved at anvende Itos lemma på processen $V^{0.5}$.

til henholdsvis r og $\sigma=V^{0.5}$, og hvor det gælder at $X_1(t) = r$ og $X_2 = V$. Den totale volatilitet i spotrentestrukturen kan hermed skrives som summen af disse to usikkerheder, som giver følgende udtryk:

$$\begin{aligned}\sigma_R(r,\sigma,t,T) &= -\frac{A(\tau)}{\tau}\left[\sqrt{\eta r + \xi V} + \sqrt{(1-\xi)V - \eta r}\right] \\ &- \frac{B(\tau)}{\tau}\left[\frac{\eta}{1-\xi}\sqrt{\eta r + \xi V} - \frac{\eta}{\xi}\sqrt{(1-\xi)V - \eta r}\right]\end{aligned} \tag{97}$$

Igen her er det med udgangspunkt i denne relation muligt at finde volatilitetsstrukturen for obligationspriserne og forwardrenterne.

Et interessant forhold skal her fremhæves. Hvis volatiliteten i spotrentestrukturen for Longstaff modellen sammenlignes med volatiliteten i spotrentestrukturen for disse to to-faktor rentestrukturmodeller, ses det, at de er identiske af udseende. Dette betyder, at introduceringen af ulinearitet i spotrenteprocessen har den (eller måske mere præcist - kan have den) implikation, at antallet af faktorer burde kunne holdes nede. Hvis man i stedet for at bevæge sig i det traditionelle lineære framework bevæger sig over i det ikke-lineære framework, er det måske muligt at få defineret rentestrukturmodeller, som tillader tilstrækkelig nuancerede former og hvor antallet af faktorer kan holdes nede. Det jeg her tænker på er, at selv om stort set alle (som nævnt tidligere) empiriske analyser på variationen i rentestrukturen viser, at der skal 3-4 faktorer til at få beskrevet hele dynamikken i rentestrukturen, er det måske muligt at definere ikke-lineære to-faktor modeller til beskrivelse heraf. Dette kunne være et alternativ til at bevæge sig over i 3-eller 4-faktor lineære rentestrukturmodeller.

En sidste modeltype, der i forbindelse med fastlæggelse af den implicitte volatilitetsstruktur vil blive diskuteret, er multifaktorversionen af Vasiceks en-faktor model - nemlig Langetiegs (1980) model.

Det generelle prisudtryk i en m-faktor Vasicek model kan vises at have følgende udseende:

$$\begin{gathered} P(t,T) = \\ \exp^{\left[-\underline{\omega}^T\underline{Q}\underline{E}^{-1}[\underline{I} - e^{-\underline{E}(T-t)}][\underline{Q}^{-1}\underline{D}^{-1}\underline{b} - \underline{Q}^{-1}\underline{X}(t)] - \underline{\omega}^T\underline{D}^{-1}\underline{b}(T-t) - \frac{1}{2}\Sigma - T + \frac{1}{2}\underline{\omega}^T\underline{D}^{-1}\underline{S}\underline{S}^T(\underline{D}^{-1})^T\underline{\omega}(T-t)\right]} \\ for \\ T = \underline{\omega}^T[\underline{Q}\underline{E}^{-1}\underline{E}^{-1}e^{-\underline{E}(T-t)}\underline{Q}^{-1} - (\underline{D}\underline{D})^{-1}]\underline{S}\underline{S}^T(\underline{D}^{-1})^T\underline{\omega} \\ og \\ \Sigma = \underline{\omega}^T\underline{Q}[\underline{I} - e^{-\underline{E}(T-t)}]\left[\frac{\underline{E}^{-1}\underline{Q}^{-1}\underline{S}\underline{S}^T(\underline{Q}^{-1})^T\underline{E}^{-1}}{\underline{E} + \underline{E}}\right][\underline{I} + e^{-\underline{E}(T-t)}]\underline{Q}^T\underline{\omega} \end{gathered} \tag{98}$$

for $dX(t) = (b + DX(t))dt + SdW(t)$, og $b^T = a^T - S\lambda^T$, hvor dette altså er den risikojusterede diffusionsproces. For ovenstående formel gælder det, at λ er en vektor af risikoparametre, SS^T er kovariansmatricen, Q er en ortogonal matrice som i søjlerne indeholder egenvektorerne for matricen D, E er en diagonal matrice med D matricens egenværdier, I er enhedsmatricen, X(t) er en vektor indeholdende den aktuelle værdi af de enkelte tilstandsvariable og ω er en vektor med et ettal (1) i første position og nuller (0) i resten. Endvidere kan det indses, at dette udtryk vil degenerere til Vasiceks prisudtryk for $D = \kappa$, $X(t) = r$, $S = \sigma$, $a = \kappa\theta$, $\lambda = \lambda$ og $\omega = 1$.

Dette udtryk kan omskrives således, at det kommer på en form som grangiveligt minder meget om prisudtrykket for Vasiceks en-faktor version, således:

$$
\begin{gathered}
P(t,T) = \\
\exp^{\left[-\underline{\omega}^T \underline{Q}\underline{E}^{-1}[\underline{I} - e^{-\underline{E}(T-t)}][\underline{Q}^{-1}R(\infty;;;\underline{\omega}) - \underline{Q}^{-1}X(t)] - R(\infty;\underline{\omega}^T;\underline{\omega}^T;\underline{\omega})(T-t) - \frac{1}{2}[\Sigma + T]\right]} \\
for \\
T = \underline{\omega}^T \underline{Q}\underline{E}^{-1}[\underline{I} - e^{-\underline{E}(T-t)}]\underline{Q}^{-1}\underline{D}^{-1}\underline{SS}^T(\underline{D}^{-1})^T\underline{\omega} \\
og \\
\Sigma = \underline{\omega}^T \underline{Q}[\underline{I} - e^{-\underline{E}(T-t)}]\left[\frac{\underline{E}^{-1}\underline{Q}^{-1}\underline{SS}^T(\underline{Q}^{-1})^T\underline{E}^{-1}}{\underline{E} + \underline{E}}\right][\underline{I} + e^{-\underline{E}(T-t)}]\underline{Q}^T\underline{\omega} \\
og \\
R(\infty;;;) = \underline{D}^{-1}\underline{b} - \frac{1}{2}\underline{D}^{-1}\underline{SS}^T(\underline{D}^{-1})^T
\end{gathered}
\tag{99}
$$

hvor $R(\infty;;;)$ i matrixform repræsenterer den langsigtede værdi af de enkelte tilstandsvariable. Yderligere skal nævnes, at $R(\infty;;\omega)$ betyder, at den sidste matrice i $R(\infty;;;)$ skal udvides med et produkt fra højre - nemlig ω. Endvidere skal det noteres, at $R(\infty;\omega^T;\omega^T;\omega)$ betyder, at den første matrice skal udvides med et produkt fra venstre - nemlig ω^T, og den anden matrice skal udvides med henholdsvis et produkt fra venstre - nemlig ω^T og et produkt fra højre - nemlig ω.

Hvis nu jeg genkalder formel 75 og foretager følgende omskrivning:

$$P(t,T) = e^{\underline{\omega}^T\underline{B}(\tau)\underline{\Omega} + \underline{\omega}^T\underline{A}(\tau)\underline{X}(t)\underline{\Omega}} \tag{100}$$

Hvor Ω er en vektor med samme længde som ω kun indeholdende ettaller (1).

Det er nu muligt med kendskab til relationen fra formel 82 at finde et udtryk for volatiliteten i spotrentestrukturen, som kan skrives således:

$$\sigma_R(t,T) = -\frac{\underline{\omega}^T\underline{A}(\tau)}{\tau}\underline{S}\underline{\Omega} \tag{101}$$

som kan vises at betyde, at A(τ) får følgende udseende:

$$\underline{A}(\tau) = \underline{QE^{-1}}[e^{-\underline{E}(T-t)} - \underline{I}]\underline{Q^{-1}} \qquad \textbf{(102)}$$

Alt i alt betyder dette, at volatiliteten i spotrentestrukturen kan udtrykkes på følgende måde i denne multifaktor normalfordelte rentestrukturmodel:

$$\sigma_R(t,T) = \frac{\omega^T \underline{QE^{-1}}[\underline{I} - e^{-\underline{E}(T-t)}]\underline{Q^{-1}}}{\tau}\underline{S\Omega} \qquad \textbf{(103)}$$

Volatilitetetsstrukturen for obligationspriserne kan hermed findes således:

$$\sigma_P(t,T) = \omega^T \underline{QE^{-1}}[\underline{I} - e^{-\underline{E}(T-t)}]\underline{Q^{-1}S\Omega} \qquad \textbf{(104)}$$

Slutteligt kan man finde et udtryk for volatiliteten i forwardrentestrukturen ved at differentiere $\sigma_P(t,T)$ fra t til T, som giver følgende udtryk:

$$\sigma^F(t,T) = \omega^T \underline{Q}e^{-\underline{E}(T-t)}\underline{Q^{-1}S\Omega} \qquad \textbf{(105)}$$

som kan ses at ville degenerere til volatilitetsstrukturen i forwardrenterne for Vasiceks en-faktor version for D = κ, S = σ og ω= 1.

Det er nu muligt at definere denne proces i Heath, Jarrow og Mortons framework, således:

$$dr^F(t,T) = [\underline{Q}e^{-\underline{E}(T-t)}\underline{Q^{-1}SQE^{-1}}[\underline{I} - e^{-\underline{E}(T-t)}]\underline{Q^{-1}S}]dt + \underline{Q}e^{-\underline{E}(T-t)}\underline{Q^{-1}S}d\tilde{W}(t) \qquad \textbf{(106)}$$

som her er formuleret i sin risikoneutrale form.

Hvis jeg slutteligt kort skal relatere denne gennemgang til Duffie og Kans (1993) multifaktor affine rentestrukturmodel (formuleret i det gaussiske framework), skal det påpeges, at udtrykket for B matricen fra formel 100 kan findes baglæns i og med, at formen på matricen A kendes og prisudtrykket også er kendt.Til sidst skal det nævnes, at den gaussiske multifaktormodel også er behandlet i Karoui og Lacoste (1992).

10: Invertering af spotrenteprocessen

Indtil nu har der været antaget, at drift-og diffusionsparametrene i spotrenteprocessen har været tidshomogene.

Denne forudsætning vil jeg lette på og derved betragte spot-renteprocessen i et lidt mere nuanceret framework. Disse betragtninger vil tage sit udgangspunkt i Hull og White (1990b)/(1993), som var de første der introducerede tidsafhængigheden bl.a. ved at foreslå en udvidet Vasicek- og CIR-model.

Udover at være en indlysende udvidelse af dette framework er dette også en måde, hvorpå de ligevægtsbaserede modeller kan udvides til at fitte initialrentestrukturen og initialvolatilitetsstrukturen, som jeg nedenfor vil gøre rede for.

Jeg vil her betragte følgende generelle spotrenteproces:

$$dr = \mu(\varphi(t),r,t)dt + \sigma(r,t)dW \qquad \textbf{(107)}$$

Hvor $\mu(\bullet)$ er driftskoefficienten, der kan være en funktion af tiden og renten samt af en tidsafhængig funktion $\varphi(t)$, $\sigma(\bullet)$ er diffusionskoefficienten, der kan være en funktion af tiden og renten, og dW er en Wiener-proces med følgende egenskaber $(dW)^2 = dt$, $dtdW = 0$ og $(dt)^2 = 0$.

Under den forudsætning at driften er defineret som $\mu(\varphi(t),r,t) = \varphi(t) - \kappa r$ og $\sigma(r,t) = \sigma(t)r^{o}$ fås den udvidede Vasicek model ved at sætte o=0, og den udvidede CIR-model ved at sætte o=0.5[32].

Under hensyntagen til renteprocessen fra formel 107 kan formel 87 skrives på følgene form:

$$\begin{gathered} -B_\tau(\tau) - A_\tau(\tau)r + A(\tau)[\varphi(t) - \Gamma(t)] - A(\tau)\kappa r \\ + \frac{1}{2}A^2(\tau)r^{2o}\sigma^2(t) - r = 0 \\ for \\ \mu(\varphi(t),t,r) = \varphi(t) - \kappa r \\ og \\ \sigma(r,t) = \sigma(t)r^{o} \end{gathered} \qquad \textbf{(108)}$$

Jeg vil i den efterfølgende del hovedsageligt beskæftige mig med den udvidede version af Vasiceks model, eftersom det ikke umiddelbart ser ud til, at der er nogen analytisk løsning for den udvidede CIR-model, se Hull og White (1990b) og Jamshidian (1993a).

[32] For κ=0 og o=0 kan dette endvidere ses at være den kontinuerte tids version af Ho og Lees (1986) model.

Af Hull og White (1990b) er det vist, at ved at introducere en tidsafhængig parameter i driftskoefficienten er det muligt at få processen til at matche initialrentestrukturen, og hvis der samtidig inkorporeres en tidsafhængig diffusionskoefficient, er det yderligere muligt at matche initialvolatilitetsstrukturen. Dette vil blive belyst nedenfor.

Lad mig for nærværende analyse betragte spotrenteprocessen for den udvidede Vasicek model, således:

$$dr = [\varphi(t) - \kappa r]dt + \sigma(t)dW \tag{109}$$

I Hull og White (1990b) er det vist, at henholdsvis A(0,T) og B(0,T) kan udtrykkes som en funktion af σ(0), initial rentestrukturen og den "observerede" volatilitetsstruktur af enten spot- eller forwardrenterne over løbetidsspektret 0 til T.

Det første step i den forbindelse er at udtrykke B(t,T) og A(t,T) ved henholdsvis A(0,T), B(0,T), σ(0), κ og φ(t).

I den forbindelse skal formel 108 differentieres med hensyn til t, således:

$$-B_{\tau t}(\tau) - A_{\tau t}(\tau)r + A_t(\tau)[\varphi(t) - \Gamma(t)] - A_t(\tau)\kappa r + A(\tau)A_t(\tau)r^{2o}\sigma^2(t) = 0 \tag{110}$$

Hvis nu denne partielle differentialligning opsplittes i to, en hvorom det gælder, at r indgår i hvert led, og en med resten, således:

$$-B_{\tau t}(\tau) + A_t(\tau)[\varphi(t) - \Gamma(t)] + A(\tau)A_t(\tau)\sigma^2(t) = 0 \tag{111}$$

og

$$-A_{\tau t}(\tau)r - A_t(\tau)\kappa r = 0 \tag{112}$$

Nu vides det, at forwardrentestrukturens volatilitetsstruktur er defineret ud fra A(τ) (og dermed volatilitetsstrukturen for henholdsvis obligationspriserne og rentestrukturen). Dette betyder, at det er specifikationen af A(τ), vi er specielt interesseret i.

Ved at anvende formel 112 i forbindelse med de led i formel 108 der indgår et r i, er det muligt at eliminere κ, således at A(τ) kan skrives som:

$$\begin{aligned} A_\tau(\tau)A_t(\tau) + A(\tau)A_{\tau t}(\tau) + A_t(\tau) &= 0 \\ \Rightarrow A(\tau) &= -\frac{A_t(\tau)(1 + A_\tau(\tau))}{A_{\tau t}(\tau)} \end{aligned} \tag{113}$$

Løsningen til dette udtryk med hensyn til randbetingelsen at A(T,T)=0, er af Hull og White (1990b) vist, giver følgende udtryk for A(τ):

$$A(\tau) = -\frac{A(0,T) - A(0,t)}{A_t(0,t)} \tag{114}$$

Det vides, at forwardrente og obligationspris volatilitetsstrukturen relaterer sig på følgende måde til A(τ) (se formel 89 og 90):

$$\begin{aligned} \sigma^F(t,T) &= -\sigma(t)A_T(\tau) \\ &og \\ \sigma_P(t,T) &= -\sigma(t)A(\tau) \end{aligned} \tag{115}$$

Hvilket er et velkendt resultat, når rentestrukturmodellen tilhører klassen af eksponentielle affine rentestrukturmodeller, se Duffie og Kan (1993) og Brown og Schaefer (1991).

Når A(τ) er defineret er det muligt at få defineret den udvidet Vasicek models volatilitetsstruktur for henholdsvis obligationspriserne og rentestrukturen, således:

$$\begin{aligned} \sigma_P(t,T) &= \sigma(t)\left[\frac{\sigma_P(0,T) - \sigma_P(0,t)}{\frac{\delta\sigma_P(0,t)}{\delta t}}\right] \\ \Rightarrow \sigma_P(t,T) &= \sigma(t)\left[\frac{\sigma_P(0,T) - \sigma_P(0,t)}{\sigma^F(0,t)}\right] \end{aligned} \tag{116}$$

Dette medfører, at volatilitetsstrukturen for rentestrukturen får følgende udseende:

$$\sigma_R(t,T) = \frac{\sigma(t)}{\tau}\left[\frac{D_T\sigma_R(0,T) - D_t\sigma_R(0,t)}{\sigma_R(0,t) + D_t\frac{\delta\sigma_R(0,t)}{\delta t}}\right] \tag{117}$$

Ved anvendelse af formel 88 er det endvidere muligt at finde volatilitetsstrukturen for forwardrenterne, som giver følgende resultat:

$$\sigma^F(t,T) = \sigma(t)\left[\frac{\sigma^F(0,T)}{\sigma^F(0,t)}\right] \tag{118}$$

I og med at A(τ) kendes fra formel 114 er det kun udtrykket for B(τ) der mangler at blive fastlagt. Det kan vises, at B(τ) har følgende udseende[33]:

[33] Se Appendix B.

$$B(\tau) = \frac{1}{2}\int_t^T e^{-2k(T-v)}\left(\int_t^v e^{k(T-s)}\sigma(s)ds\right)^2 dv - \int_t^T e^{-k(T-v)}\int_t^v e^{k(T-s)}[\varphi(s) - \Gamma]dsdv \quad \textbf{(119)}$$

Hvor det kan vises under hensyntagen til at parametrene i spotrenteprocessen fra formel 109 er konstante med $\varphi(t) = \kappa\theta$ og $\Gamma(t) = \lambda\sigma$, degenererer denne til en spotrenteproces af formen $dr(t) = [\kappa[\theta - r] - \lambda\sigma]dt + \sigma dW_t$ - dvs Vasiceks risikoneutrale spotre betyder, at $A(\tau)$ og $B(\tau)$ får følgende udseende:

$$A(t,T) = \frac{1}{\kappa}[e^{-\kappa(T-t)} - 1]$$

$$B(t,T) = \frac{1}{\kappa}[1 - e^{-\kappa(T-t)}]R(\infty) - (T-t)R(\infty) - \frac{\sigma^2}{4\kappa^3}[1 - e^{-\kappa(T-t)}]^2 \quad \textbf{(120)}$$

$$for$$

$$R(\infty) = \theta - \frac{\lambda\sigma}{\kappa} - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\kappa^2}$$

Forwardrenterne $r^F(t,T)$ kan nu findes ved anvendelse af formel 77, som giver følgende resultat:

$$r^F(t,T) = -B_T(\tau) - A_T(\tau)r$$

$$for$$

$$A_T(\tau) = e^{-k(T-t)} \quad \textbf{(121)}$$

$$B_T(\tau) = \frac{1}{2}e^{-2k(T-t)}\left(\int_t^T e^{k(T-s)}\sigma(s)ds\right)^2 - e^{-k(T-t)}\int_t^T e^{k(T-s)}[\varphi(s) - \Gamma]ds$$

Herefter kan et udtryk for den stokastiske proces for forwardrenterne fås ved anvendelse af Itos lemma på formel 121, således:

$$dr^F(t,T) = -B_{Tt}(\tau)dt - A_{Tt}(\tau)rdt - A_T(\tau)dr \quad \textbf{(122)}$$

som ved indsættelse heri af formel 109 resulterer i, at følgende omskrivning kan foretages[34]:

$$dr^F(t,T) = [-A_T(\tau)\varphi(t) - r[A_{Tt}(\tau) - A_T(\tau)\kappa] - B_{Tt}(\tau)]dt - A_T(\tau)\sigma(t)dW \quad \textbf{(123)}$$

[34] Hvor formel 123 kan ses at ville degenerere til formel 63 for $\varphi(t) = \kappa\theta$, $\Gamma = \sigma\lambda$ og $\sigma(t) = \sigma$.

Det ses nu, at volatilitetsstrukturen for forwardrenterne generelt kan udtrykkes som:

$$\sigma^F(t,T) = \sigma(t)\frac{A_T(0,T)}{A_t(0,t)} = \sigma(t)\frac{\sigma^F(0,T)}{\sigma^F(0,t)} \qquad \textbf{(124)}$$

som er identisk med formel 118 foroven.

Specifikation af A(τ) er mere generel, end det der er nødvendigt, når κ er tidsuafhængig, da A(τ) i dette tilfælde kan udtrykkes som $A(\tau) = \int_t^T e^{-\kappa(T-s)}ds = \frac{1}{\kappa}[e^{-\kappa\tau} - 1]$

her er opstillet gælder faktisk også i det tilfælde, hvor κ er tidsafhængig, altså κ = κ(t). Den eneste forskel er, at κ(T - t) skal udskiftes med $\int_t^T \kappa(s)ds$.

Som indledning til den udvidede Vasicek model påpegede jeg, at hvis parametrene i processen for spotrenten blev gjort tidsafhængige, kunne de ligevægtsbaserede modeller "fittes" til aktuelle markedsdata, dvs. modellerne kunne gøres markedsforme.

Antagelse nr. 4

A(0,T) for alle T kan findes ud fra en fastlæggelse af den forventede fremtidige volatilitet for den risikofri rente (diffusionskoefficienten) samtidig med, at enten volatilitetsstrukturen for obligationspriserne, rentestrukturen eller forwardrentestrukturen fastlægges. Hvis det er volatilitetsstrukturen for rentestrukturen man ønsker at anvende er udgangspunktet formel 117. Hvis alternativt man valgte at tage udgangspunkt i volatilitetsstrukturen for enten obligationspriserne eller forwardrenterne, ville udgangspunktet henholdsvis skulle være formel 116 og 118.

Herefter kan B(0,T) for alle T findes ved at anvende enten rentestrukturen eller diskonteringsfunktionen - nemlig ved at tage udgangspunkt i enten formel 76 eller 75, givet A(0,T) for alle T.

Bevis:

Lad os nu antage at A(0,T) ønskes fastlagt ved simultan anvendelse af volatiliteten i den risikofri rente og volatilitetsstrukturen for obligationspriserne. Det vides fra formel 115, at volatiliteten i obligationspriserne kan udtrykkes som:

$$\sigma_P(t,T) = -\sigma(t)A(t,T) \qquad \textbf{(125)}$$

som for t = 0 medfører, at A(0,T) kan findes som:

$$A(0,T) = -\frac{\sigma_P(0,T)}{\sigma(0)} \tag{126}$$

Hvor denne relation gør os i stand til at fastlægge/estimere κ.

I og med at obligationspriserne i initial situationen kan skrives som

$$P(0,T) = e^{B(0,T) + A(0,T)r} \tag{127}$$

Altså B(0,T) kan bestemmes givet obligationspriserne P(0,T) og A(0,T), således:

$$B(0,T) = lnP(0,T) - A(0,T)r \tag{128}$$

Hvor dette udtryk gør det muligt at bestemme φ(t) og σ(t)[35].

På tilsvarende vis kan beviset gennemføres ved i stedet for at bruge volatilitetsstrukturen for obligationspriserne at der eksempelvis tages udgangspunkt i volatilitetsstrukturen for forwardrenterne. Dette overlades dog til læseren.

Qed.

Indtil videre har udgangspunktet været en en-faktor stokastisk proces med en tidsafhængig drift parameter til at matche initialrentestrukturen og en tidsafhængig volatilitetsparameter til at matche initialvolatilitetsstrukturen.

Hvad angår det at inkorporere en tidsafhængig volatilitetsparameter i den stokastiske proces, er dette ikke altid at foretrække i og med, at det betyder, at de fremtidige volatilitetsstrukturer ikke er stationære, hvilket ikke er ønskværdigt. Hvis der derimod forudsættes, at volatilitetsparameteren er tidsuafhængig kan dette i praksis betyde, at initialvolatilitetsstrukturen ikke bliver fuldstændig korrekt beskrevet. Dette er måske et

[35] Det er dog i den forbindelse vist af Rogers (1993), at der ikke kan garanteres en unik løsning til dette problem ihvertfald ikke i kontinuert tid. I forbindelse med fastlæggelsen af disse tidsafhængige parametre har Rogers side 97 følgende indvending "..,*the estimation of the model from data is not practical. Firstly, the yield curve is not some nice smooth curve known at all positive real points; in practice, it is only known at a limited set of maturities (typically 10-20), with dubious accuracy of measurement. Any procedure which requires repeated differentiation of this "curve" cannot be expected to work. Secondly, even if one could obtain estimates of the functions κ, θ, σ from the data, there is no reason why we should get consistent estimates if we performed the same analysis of the term-structure as it appears one week later!"*. Hvad angår det første punkt er det muligt, ihvertfald i diskret tid, at opnå estimator for den ukendte parametervektor. Hvis man nu forestiller sig, at funktionerne A(τ) og B(τ) ændrer sig signifikant over tid, er det selvfølgelig nærliggende at forkaste modellen som værende af ingen praktisk værdi. Dette er dog fejlagtigt i og med, at det er nødvendigt at sondre mellem det at opstille "modellen" for dynamikken i rentestrukturen og det at definere en model der genererer fornuftige resultater for en lang række af renteafhængige fordringer. Hvor approachet med at invertere spotrenteprocessen tilhører den sidste klasse.

mindre problem med det forhold in mente, at initial situationens korrekte volatilitetsstruktur under alle omstændigheder ikke kendes. Det bedste man kan håbe på er at anvende den implicitte volatilitet for eksempelvis handlede europæiske optioner. Hvis vi nu antager, at initialvolatilitetsstrukturen kan fastlægges eksplicit, ville det formentlig nok være muligt at foretage et rimeligt match heraf selv uden at introducere en tidsafhængig volatilitetsparameter. Et krav hertil er formentlig, at volatilitetsparameteren tillades at tilhøre en bredere klasse af volatilitetsstrukturer end de traditionelle[36] (hvor de traditionelle som bekendt tilhører følgende klasse $\sigma(r,T) = \sigma r^{o}$, for o ≥ 0 (nul)).

Når det er initialrentestrukturen der skal matches tages der traditionelt udgangspunkt i at introducere en tidsafhængig parameter i driftspecifikationen. Lad mig i stedet for dette subjektive og traditionelle valg kigge lidt nærmere på, om andre metoder også kunne tænkes at være anvendelige.

Feynman-Kac[37] løsningen repræsenterer initial prisen på en nulkuponobligation der udløber på tidspunkt T, således[38]:

$$P(0,T) = E_0\left[e^{-\int_0^T r^F(0,s)ds}\right] \tag{129}$$

Hvor E_0 er den risikoneutrale forventningsoperator på tidspunkt 0. Den risikoneutrale spotrenteproces under det nye sandsynlighedsmål er givet ved følgende stokastiske proces:

$$dr = [\varphi(t) - \kappa r]dt + \sigma(t)d\tilde{W} = \mu(r,t)dt + \sigma(t)d\tilde{W} \tag{130}$$

Hvor Girsanovs teori identificerer det nye sandsynlighedsmål som $d\tilde{W} = dW - \Gamma dt$.

Definer nu u = T - Δt, således at det er muligt at approksimere $\int_0^T r^F(0,s)ds$ med

$\int_0^u r^F(0,s)ds + r(T)\Delta t$, for r(T) defineret som:

[36] En nærmere analyse af dette vil dog ikke blive foretaget her, derimod vil der blive diskuteret hvorledes den tids-afhængige spotrenteproces kan fittes til markedspriser ved anvendelse af en diskretiseringsteknik der tillader mere nuancerede volatilitetsparametre.

[37] For hvorledes den partielle differentialligning relaterer sig til Feynman-Kac løsningen se Duffie (1992) Appendix E. Hvor det også er nævnt, at Feynman-Kac løsningen generelt går under navnet "the probabilistic solution".

[38] De overvejelser der her foretages er hovedsageligt taget med udgangspunkt i Uhrig og Walter (1994).

$$r(T) \approx r(u) + \mu(r,u)\Delta t + \sigma(u)\Delta W \tag{131}$$

Dette betyder, at formel 129 kan omskrives til:

$$P(0,T) = E_0\left[e^{-\int_0^u r^F(0,s)ds - r(T)\Delta t}\right] \tag{132}$$

som er kontinuert i μ(r,u), se Uhrig og Walter (1994) Appendix A.

Hvis det nu antages, at μ(r,t) op til tidspunkt t < u er blevet fastlagt i de tidligere step således, at de diskonterede obligationspriser pr. konstruktion matcher de aktuelle markedspriser for alle P(0,y) for y ≤ t < u. Givet at diskonteringsfunktionen er postiv og faldende for alle 0 < t ≤ T, eksisterer der en unik funktion μ(r,t) som resulterer i, at de diskonterede obligationspriser vil matche de aktuelle obligationspriser. Hvor dette, som nævnt tidligere, kan gøres ved at introducere en tidsafhængig parameter i driftspecifikationen. Her er der to muligheder, enten kan markedsrisikoparameteren Γ(t) vælges at være tidsafhængig eller som der traditionelt gøres ved introducering af en tidsafhængig parameter i processens drift (φ(t)).

Et interessant forhold skal her nævnes, og det er, at Heath, Jarrow og Morton (1991) i afsnit 8 viser, at hvis der i CIR-modellen introduceres en tidsafhængig parameter i driftspecifikationen, er det ikke muligt at matche alle typer af initialrentestrukturer pga det forhold, at der i CIR- modellen er indeholdt den restriktion[39], at $2\kappa\theta(t) \geq \sigma^2$. Denne argumentation er selvfølgelig korrekt, når en tidsafhængig parameter introduceres i driftspecifikationen. Dette vil derimod ikke være tilfældet, hvis markedsrisikoparameteren vælges at være tidsafhængig.

Det kan altså indses, at det at introducere en tidsafhængig parameter i specifikationen af driften for på den måde at matche initial rentestrukturen i visse tilfælde kan have nogle uheldige konsekvenser. Et andet problem med det traditionelle approach er, at en modificering af modellens drift kan resultere i, at en "korrekt" formuleret model bliver transformeret om til en set fra et økonomisk synspunkt meningsløs model.

Det at gøre markedsrisikoparameteren tidsafhængig kan da også indses at være præcis den indfaldsvinkel, der blev anvendt i afsnit 8 (samt i Appendix A), her blev præferencestrukturen nemlig duplikeret ved at anvende noterede priser/renter. Endvidere anvendte Madsen (1995b) også indirekte dette approach i opstillingen af SOR-modellen, hvor et afkastmål under det oprindelige sandsynlighedsmål blev defineret. Her blev markedsrisikoparameteren nemlig direkte fundet ud fra initialrentestrukturen, de definerede shift-funktioner, rentestrukturens hældning og rentestrukturens krumning, se afsnit 6 i nævnte papir.

[39] Hvor denne restriktion sikrer, at renten ikke kan blive negativ, og stammer fra betingelsen fra Feller (1951).

Med hensyn til prisfastsættelse af afledte renteafhængige fordringer (såsom optioner) er der yderligere en fordel ved at kalibrere modellen til aktuelle markedspriser ved at lade markedsrisikoparameteren være tidsafhængig. For det første vil dette betyde, at den afledte effekt på optionsprisen af en fejlspecifikation af prisen på det underliggende instrument vil være elimineret[40]. For det andet vil prisen på optionen være direkte relateret til observerbare faktorer - såsom renteprocessens parametre og de aktuelle markedspriser. Altså i stedet for at foretage deciderede antagelser om præferencestrukturen kan der på afledte fordringer beregnes priser, der er præference-frie - dvs. priserne er baseret på valide præferencer taget direkte fra markedspriserne på obligationer. Dette dog under den antagelse, at den valgte stokastiske proces med "succes" evner at beskrive dynamikken i rentestrukturen[41].

Hvis nu man vil relatere denne udvidede Vasicek model til HJM´s framework, er det muligt ved anvendelse af udtrykket for forwardrenternes volatilitet for formel 118 at opstille den proces der driver forwardrenterne, således:

$$dr^F(t,T) = \left[\sigma^2(t)\left[\frac{\sigma^F(0,T)[\sigma_P(0,T) - \sigma_P(0,t)]}{(\sigma^F(0,t))^2}\right] - \sigma(t)\left[\frac{\sigma^F(0,T)}{\sigma^F(0,t)}\right]\Gamma(t)\right]dt + \sigma(t)\left[\frac{\sigma^F(0,T)}{\sigma^F(0,t)}\right]dW \qquad (133)$$

Hvor denne relation kan ses at ville degenerere til formel 63 i tilfældet, at σ(t) er tids-homogen.

Helt i stil med Vasiceks oprindelige formulering af den tids-homogene version bliver præferencestrukturen heller ikke i den udvidede Vasicek model eksplicit bestemt.

Det fremgår af formel 133, at det ikke er nødvendigt for Γ(t) er være konstant men sagtens kan være tidsafhængig.

Formel 133 kan yderligere omskrives således:

[40] I og med at nulkuponobligationer generelt ikke kan observeres i markedet, er betingelsen for denne påstand, at det er muligt at estimere disse under hensyntagen til at prisresidualen ≈ 0. Dette kan ikke generelt anses at være tilfældet, se Madsen (1994b).

[41] I Appendix C er der anvist to diskretiseringsmetoder som gør det muligt at matche henholdsvis initial rentestrukturen og initial volatilitetsstrukturen (hvis det ønskes). Den ene metode bygger på Hull og White (1994), hvorimod den anden bygger på Kijima og Nagayama (1995). Hvor det yderligere gælder, at Kijima og Nagayamas metode er konstrueret under hensyntagen til, at volatilitetsstrukturen kan tilhøre en rigere klasse end $\sigma(r,T) = \sigma r^o$, for o ≥ 0 (nul)).

$$r^F(t,T) = r^F(0,T) + \int_0^t \left[\sigma^2(s) \left[\frac{\sigma^F(0,T)[\sigma_P(0,T) - \sigma_P(0,s)]}{\left(\sigma^F(0,s)\right)^2} \right] - \sigma(s) \left[\frac{\sigma^F(0,T)}{\sigma^F(0,s)} \right] \Gamma(s) \right] ds + \int_0^t \sigma(s) \left[\frac{\sigma^F(0,T)}{\sigma^F(0,s)} \right] dW(s) \quad (134)$$

Dette udtryk kan relateres til Babbs (1990)/(1993) modelformulering. Babbs specificerer forwardvolatilitetsstrukturen som $\sigma^F(t,T) = G'(T)\gamma(t)$, for G(0) = 0, γ(0) = 1, og hvor G'(repræsenterer den afledte af G( ). I denne modelformulering betyder det, at obligationsprisvolatilitetsstrukturen kan skrives som

$$\sigma_P(t,T) = \int_t^T \sigma^F(s,T)ds = [G(T) - G(t)]\gamma(t)$$

. Dette indikerer, at for defineret således:

$$G'(T) = \sigma^F(0,T)$$
$$\gamma(t) = \frac{\sigma(t)}{\sigma^F(0,t)} \quad \textbf{(135)}$$

kan formel 134 ses at være forenelig med Babbs volatilitetsstrukturformulering. Dette betyder, at formel 134 kan skrives på følgende måde i Babbs framework:

$$r^F(t,T) = r^F(0,T) + G'(T)\int_0^t [G(T) - G(s)]\gamma^2(s)ds - G'(T)\int_0^t \Gamma(s)ds + G'(T)\int_0^t \gamma(s)dW(s) \quad \textbf{(136)}$$

som er identisk med Babbs (1990) formel 43 side 126.

Hvor spotrenteprocessen hermed kan skrives således[42]:

$$r(t) = r^F(0,t) + G'(t)\int_0^t [G(t) - G(s)]\gamma^2(s)ds - G'(t)\int_0^t \Gamma(s)ds + G'(t)\int_0^t \gamma(s)dW(s) \quad \textbf{(137)}$$

Den stokastiske proces der driver spotrenterne kan nu vises ved en anvendelse af Itos lemma

[42] Det kan i den forbindelse udledes, at HJM-versionen af Vasicek modellen fremkommer for $G'(t) = e^{-\kappa t}$, $\gamma(t) = \sigma e^{\kappa t}$ *og* $\Gamma(t) = \lambda\sigma$.

på formel 137 at have følgende udseende:

$$dr = \mu'(t)dt + \frac{G''(t)}{G'(t)}[\mu(t) - r(t)]dt + G'(t)\gamma(t)dW(t)$$
$$for \qquad \textbf{(138)}$$
$$\mu(t) = r^F(0,t) + G'(t)\int_0^t [G(t) - G(s)]\gamma^2(s)ds - G'(t)\int_0^t \Gamma(s)ds$$

Hvor dette kan ses at være et udtryk for en generel mean-reversion proces.

Det kan altså i den forbindelse konkluderes, at den udvidede Vasicek model fra Hull og White (1990b) kan findes som et special tilfælde af Babbs mere generelle modelformulering[43], for G(t), γ(t) og Γ(t) defineret således:

$$G'(T) = e^{-\int_0^t \kappa(s)ds}$$
$$\gamma(t) = \sigma(t)e^{\int_0^t \kappa(s)ds} \qquad \textbf{(139)}$$
$$\int_0^t \Gamma(s)ds = \left[G'(t)\int_0^t [G(t) - G(s)]\gamma^2(s)ds - \int_0^t \mu(\varphi(s)r,s)ds\right]\frac{1}{G'(t)}$$

Det kan altså konkluderes, at der i Hull og Whites udvidede Vasicek model er indeholdt en implicit antagelse om, at markedsrisikoparameteren er af ovenstående form[44].

Det kan ud fra det foregående indses, at måden hvorpå de ligevægtsbaserede modeller gøres markedskonforme er ved at gøre parametrene i spotrenteprocessen tidsafhængige. Dette betyder nemlig, at den observerede rentestruktur og volatilitetsstruktur kan matches fuldt ud.

De arbitragebaserede modeller er i modsætning hertil konstrueret til at være markedskonforme i og med, at de pr. definition matcher initial rentestrukturen. I de arbitragebaserede modeller bliver endvidere den funktionelle form på volatilitetsstrukturen eksplicit bliver fastlagt.

Hvis man holder sig i det gaussiske framework, betyder dette endvidere, at det for en lang række afledte instrumenter er muligt at finde såkaldte analytiske løsninger. Hvor dette selvfølgelig både gælder hvis man definerede modellen i det ligevægtsbaserede framework og

[43] Hvor dette også er påpeget/vist af Babbs (1990) side 94-96.

[44] En sådan konsekvens hvad angår markedsrisikoparameteren er endnu et forhold der trækker i retning af ikke at matche initialrentestrukturen ved at introducere en tidsafhængig parameter i driftspecifikationen, men derimod ved at lade markedsrisikoparameteren være tidsafhængig.

i det arbitragebaserede framework[45].

10: Konklusion

I dette papir har jeg analyseret det modelframework, som blev introduceret af Heath, Jarrow og Morton (1987)/(1991). Med udgangspunkt i processen for spotrenterne og obligationspriserne og under antagelse om at volatilitetsstrukturen var deterministisk, fik jeg opstillet den proces som forwardrenterne bliver drevet af.

Den risikoneutrale forwardrenteproces blev i den forbindelse også udledt. Det viste sig for det første, at driften i den risikoneutrale forwardrenteproces var fuldt ud defineret, når først volatilitetsstrukturen for forwardrenterne var fastlagt. For det andet viste det sig, at en entydig fastlæggelse af processen for spotrenterne ikke ville være nok til at identificere obligationspriserne, dette vil nemlig først være muligt, når den funktionelle form på præferencestrukturen er kendt. Dette blev påvist ved at vise, at spotrenteprocessen for Vasicek modellen kunne duplikeres ved eksempelvis en spotrenteproces af Ho og Lee typen og et passende valg af funktionel form på præferencestrukturen.

Derefter foretog jeg en gennemgang af en række af de i litteraturen foreslåede volatilitetsstrukturer og opstillede i den forbindelse et udtryk, som indeholdt disse som specialtilfælde, og hvor nye endvidere kunne specificeres.

Det blev vist, at det var muligt at estimere volatilitetsstrukturen i et HJM framework ved at anvende nulkuponobligationspriser. Kravet til dette var, at det skulle være muligt at faktorisere volatilitetsstrukturen op i to dele. Hvor den ene del kun var en funktion af initialtidspunktet og den anden del kun en funktion af løbetiden, dvs volatilitetsstrukturen opfyldte Markov be-tingelsen.

Den sidste del af papiret beskæftigede sig med, hvorledes det var muligt at finde den implicitte volatilitetsstruktur på i traditionelle ligevægtsmodeller. Udgangspunktet var her den type af rentestrukturmodeller, der tilhører de eksponentielle affine rentestrukturmodeller.

[45] Dette betyder dog ikke, at det ikke kan være muligt at finde analytiske løsninger til en lang række af de afledte fordringer i et andet framework end det gaussiske. Jeg har dog endnu ikke set, at det har været muligt i de tidsafhængige ligevægtsbaserede modeller at finde f.eks. analytiske udtryk for optioner på obligationer andet end i det gaussiske framework. Dette indikerer selvfølgelig, at hvis man i det ligevægtsbaserede framework ønsker at matche initialrentestrukturen og initialvolatilitetsstrukturen, og ikke er så glad for antagelsen om, at renterne er normalfordelte, er det nødvendigt at ty til eksempel numeriske løsningsmetoder for at være i stand til at prisfastsætte afledte instrumenter. En i praksis populær metode at gøre de ligevægtsbaserede modeller markedskonforme er ved at holde sig i det tids-homogene framework, og herefter fitte rentestrukturen ved anvendelse af det analytiske udtryk for obligationspriserne. Denne metode er selvfølgelig teoretisk set i strid med selve modelformuleringen, men adskiller sig dog ikke fundamentalt for måden, f.eks. Black 76 modellen til prisfastsættelse af optioner anvendes i praksis. Den fremgangsmåde er bl.a. anvendt af Madsen (1994b).

I forbindelse med gennemgangen blev der også vist, hvorledes relationen var imellem volatilitetsstrukturen for forwardrenterne, obligationspriserne og spotrenterne.

Dette blev gjort for en række en-faktor modeller, nemlig Cox, Ingersoll og Ross (1985), Vasicek (1977) og Longstaff (1989). Hvad angår to-faktor modeller blev Longstaff og Schwartz (1991) og Vasicek og Fong (1991) berørt, og slutteligt blev den multifaktor gaussiske rentestrukturmodel med udgangspunkt i Langetieg (1980) også behandlet.

Slutteligt blev der med udgangspunkt i Hull og White (1990b)/(1993) vist, hvorledes det ved at introducere en tidsafhængig parameter i driftspecifikationen og i volatilitetsspecifikationen var muligt at mache både initialrentestrukturen og initialvolatilitetsstrukturen. Der blev i den forbindelse argumenteret for, at det nok ville være at foretrække, at antage at markedsrisikoparameteren var tidsafhængig i stedet for at introducere en tidsafhængig parameter i driftspecifikationen, når initialrentestrukturen skulle matches. Yderligere argumenterede jeg også for, at det ikke kan anbefales at lade diffusionskoefficienten være tidsafhængig. Dette eftersom de fremtidige volatilitetsstrukturer ikke er stationære.

Hvad angår den udvidede Vasicek model fra Hull og White (1990b)/(1993) blev den omskrevet til HJM´s framework, og her blev det vist, at denne modelformulering var et special tilfælde af Babbs (1990)/(1993) mere generelle formulering af en tidsafhængig proces indeholdende mean-reversion.

Litteraturliste

Amin og Morton (1993) "Implied Volatility Functions in Arbitrage Free Term Structure Models", Working Paper University of Michigan, maj 1993

Babbs (1990) "The Term Structure of Interest Rates Stochastic Processes and Contingent Claims", Ph.d Dissertation, The Management School, Imperial College

Babbs (1993) "Generalized Vasicek models of the Term Structure", Working Paper Midland Global Markets 1993

Black og Scholes (1973) "The pricing of Options and Corporate Liabilities", Journal of

Political Economy, vol 81, side 637-654

Brenner (1989) "Three Essays on The Term Structure", Ph.D Dissertation Cornell University august 1989

Brown og Schaefer (1991) "Interest Rate Volatility and The Term Structure", Working Paper London Business School, juli 1991

Clewlow (1992) "Finite Difference Techniques for One and Two Dimension Option Valuation Problems", working paper Warwick University, november 1992, FORC Preprint 90/10

Cox, Ingersoll og Ross (1985) "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", Econometrica 53, side 363-385

Cox, Ross og Rubenstein (1979) "Option Pricing: A simplified Approach", Journal of Financial Economics 7, 1979, side 229-263

Dahl (1989) "Variationer i rentestrukturen og styring af renterisiko", Finans Invest februar 1989

Duffie (1992) "Dynamic Asset Pricing Theory", Princeton University Press

Duffie og Kan (1993) "A Yield-Factor Model of Interest Rates", Working Paper Stanford University

Dupire (1995) "A Unified Theory of Volatility", working paper Banque Paribas, maj 1995

Feller (1951) "Two Singular Diffusion Problems", Annals of Mathematics vol 54, nr. 1, side 173-182

Flesaker (1990a) "A Three Factor Model of Term Structure Dynamics: Theory and Empirical Implications", Working Paper University of Illinois

Flesaker (1990b) "Arbitrage Free Pricing of Interest Rate Futures and Forward Contracts", Working Paper University of Illinois

Garbade (1986) "Modes of Fluctuations in Bonds Yields - an Analysis of Principal Components", Bankers Trust, Money Market juni

Harrison og Kreps (1979) "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets", Journal of Economic Theory 20, side 381-408

Heath, Jarrow og Morton (1987) "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A new Methodology", Working Paper Cornell University oktober 1987

Heath, Jarrow og Morton (1991) "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A new Methodology for Contingent Claim Valuation", Working Paper Cornell University

Ho og Lee (1986) "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims", Journal of Finance vol 41, nr. 5, side 1011-1029

Hull (1993) "Options, Futures and other Derivative Securities", Prentice-Hall International Editions 1993, second edition

Hull og White (1990a) "Valuing Derivative Securities Using the Eksplicit Finite Difference Method", Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 25, no. 1, marts 1990, side 87-99

Hull og White (1990b) "Pricing Interest-Rate-Derivative Securities", The Review of Financial Studies 3, side 573-592

Hull og White (1993) "One-Factor Interest Rate Model and the Valuation of Interest Rate Derivative Securities", Journal of Financial and Quantitative Analysis 28, 1993, side 235-254

Hull og White (1994) "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models", Working paper University of Toronto, januar 1994

Jamshidian (1987) "Pricing of Contingent Claims in The One-Factor Term Structure Model", Working Paper Merrill Lynch, Trading Analysis Group, juli 1987

Jamshidian (1990) "Bond and Option Evaluation in the Gaussian Interest Rate Model", Working Paper, Merrill Lynch

Jamshidian (1991a) "The Preference-Free Determination of Bond and Option Prices from The Spot Rate", Advances in Futures and Options Research 4, side 51-67

Jamshidian (1991b) "Forward Induction and Construction of Yield Curve Diffusion Models", Journal of Fixed Income, juni 1991, side 62-74

Jamshidian (1993a) "A Simple Class of Square-Root Interest Rate Models",Working Paper Fuji International Finance, januar 1993

Jamshidian (1993b) "Bond, Futures and Option Evaluation in the Quadratic Interest Rate Model", Working Paper Fuji International Finance, marts 1993

Karatzas og Shreve (1988) "Brownian Motion and Stochastic Calculus", New York, Springer

Verlag

Kijima og Nagayama (1995) "Efficient Numerical Procedures for the Hull-White Extended Vasicek Model", The Journal of Financial Engineering, vol. 3, no. 3/4, 1995, side 275-292

Langetieg (1980) "A Multivariate Model of the Term Structure", Journal of Finance 35, side 71-97

Litterman og Scheinkman (1988) "Common factors affecting Bond Returns", Goldmann, Sachs & Co, Financial Strategies Group, September 1988

Longstaff (1989) "A non-linear general equilibrium model of the term structure of interest rates", Journal of Financial Economics 23, side 195-224

Longstaff og Schwartz (1991) "Interest-rate volatility and the term structure: A two-factor general equilibrium model", Working Paper Ohio State University november 1990

Madsen (1994a) "Rentestrukturen og forventningshypoteserne; en betragtning under usikkerhed", arbejdspapir Realkredit Danmark 11. januar 1994

Madsen (1994b) "Estimation af rentestrukturen - et implicit volatilitetsapproach", arbejdspapir Realkredit Danmark 9. august 1994

Madsen (1995a) "Prisfastsættelse af obligationer i kontinuert tid", arbejdspapir Realkredit Danmark 30. oktober 1995

Madsen (1995b) "ATP-modellen og variationer i rentestrukturen", arbejdspapir Realkredit Danmark 20. oktober 1995

Madsen (1995c) "Prisfastsættelse af renteafhængige fordringer", arbejdspapir Realkredit Danmark, 8. september 1995

Madsen (1995d) "Konverterbare Obligationer II - Prisfastsættelse og Prepayment Modellering", arbejdspapir Realkredit Danmark 25. august 1995

Miltersen (1993) "An Empirical Study of the Term Structure of Interest Rates", Working Paper no 7 1992, Institut for Virksomhedsledelse, Odense Universitet

Nelson og Ramaswany (1990) "Simple Binomial Processes as Diffusion Approximations in Financial Models", The Review of Financial Studies vol. 3, no. 3, 1990, side 393-430

Rogers (1993) "Which Model for Term-Structure of Interest Rates should one use?", arbejdspapir Bath Universitet juni 1993

Uhrig og Walter (1994) "Term Structure of Interest Rates, Consistent Risk Attitudes, and reference Free Option Prices", Working Paper University of Mannheim juli 1994

Uhrig og Walter (1995) "A new numerical Approach for Fitting the Initial Yield Curve", working paper University of Mannheim

Vasicek (1977) "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", Journal of Financial Economics 5, side 177-188

Vasicek og Fong (1991) "Interest Rate Volatility as a Stochastic Factor", Working Paper Gifford Fong Associates februar 1991

Appendix A

Givet at volatilitetsstrukturen for forwardrenterne kan faktoreres op i to dele, hvor den ene del afhænger af det aktuelle tidspunkt t, og den andet del afhænger af løbetiden T, således[46]:

[46] Dvs. opfylder Markov egenskaben, se Madsen (1995c).

$$\sigma^F(t,T) = h(t)H(T) \tag{140}$$

er det muligt at udskifte præferenceparameteren for obligationsprisfunktionen således, at observerede obligationspriser kommer til at fungere som den i markedet observerede præferencestruktur.

Hvor dette i henhold til formel 72 medfører, at de resterende obligationspriser kan prisfastsættes relativt i forhold til observerbare obligationspriser og den parametervektor, der definerer volatilitetsstrukturen - altså prisfastsættelse af obligationer foregår principielt uden kendskab til præferencestrukturen.

Lad mig for god ordens skyld genkalde formel 72:

$$\begin{aligned} P(t,T) &= \frac{P(0,T)}{P(0,t)}\exp\left[-\int_t^T\int_0^t h(s)^2H(v)\int_s^v H(y)dydsdv\right] \\ &\times \exp\left[-\frac{\int_t^T H(v)dv}{\int_t^K H(v)dv} \times \left[dR(t,K) - \int_t^K\int_0^t h(s)^2H(v)\int_s^v H(y)dydsdv\right]\right] \end{aligned} \tag{141}$$

her vist i det en-dimensionelle tilfælde.

Hvis det nu er Vasicek modellen der betragtes vides det, at volatilitetsstrukturen for forward-renterne har følgende udseende:

$$\sigma^F(t,T) = \sigma e^{-\kappa(T-t)} \tag{142}$$

Hvor det tydeligt fremgår, at en faktorering i henhold til formel 140 er mulig.

Ved indsættelse af dette i formel 141 medfører det, at den bliver af følgende form:

$$\begin{aligned} P(t,T) &= \frac{P(0,T)}{P(0,t)}\exp\left[-A(t,T) - \frac{B(t,T)}{B(t,K)}[dR(t,K) - A(t,K)]\right] \\ &\textit{for} \\ B(t,X) &= \frac{1}{\kappa}[e^{-\kappa t} - e^{-\kappa X}] \qquad \textit{for} \quad X = T,K \\ &\textit{og} \\ A(t,X) &= \frac{\sigma^2}{4\kappa^3}[(e^{2\kappa t} - 1)(e^{-2\kappa X} - e^{-2\kappa t}) \\ &- 4(e^{\kappa t} - 1)(e^{-\kappa X} - e^{-\kappa t})] \qquad \textit{for} \quad X = T,K \end{aligned} \tag{143}$$

Den mest interessante egenskab ved at være i stand til at foretage en sådan faktorisering af volatilitetsstrukturen er, at dette gør det muligt at estimere de parametre der beskriver volatilitetsstrukturen ved at anvende hele informationen i rentestrukturen.

Dette er i modsætning til den traditionelle måde at estimere volatilitetsstrukturen i HJM modellerne på, hvor der generelt anvendes optionspriser - se bl.a. Amin og Morton (1993) og Miltersen (1993).

Hvis man derimod "nøjes" med at betragte den klasse af modeller hvorom det gælder, at volatilitetsstrukturen kan faktoriseres op i henhold til formel 140, betyder dette, at man bliver i stand til at estimere volatilitetsstrukturen over hele løbetidsspektret.

I stedet for at anvende en obligationspris til at duplikere præferencestrukturen med kunne der alternativt vælges spotrenten.

Argumentationen er som følger:

Processen for spotrenten kan i henhold til formel 47 og under hensyntagen til Markov antagelsen fra formel 140 skrives som:

$$r(t) = r^F(0,t) + \int_0^t \sigma^F(s,t)\int_s^t \sigma^F(s,v)dvds + H(t)\int_0^t h(s)d\tilde{W}(s) \tag{144}$$

Dette betyder, at den stokastiske part kan udtrykkes som:

$$\int_0^t h(s)d\tilde{W}(s) = \frac{r(t) - r^F(0,t) - \int_0^t \sigma^F(s,t)\sigma_P(s,t)ds}{H(t)} \tag{145}$$

Alt i alt medfører dette, at obligationsprisen kan skrives således:

$$P(t,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)}\exp\left[-\int_t^T\int_0^t h(s)^2 H(v)\int_s^v H(y)dydsdv\right] \times \exp\left[-\frac{\int_t^T H(v)dv}{H(t)} \times \left[r(t) - r^F(0,t) - \int_0^t \sigma^F(s,t)\sigma_P(s,t)ds\right]\right] \tag{146}$$

Hvor dette udtryk givet volatilitetsstrukturen fra formel 142 kan vises at give følgende resultat:

$$P(t,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)}\exp\left[-A(t,T) - \frac{1}{\kappa}[1 - e^{-kT}][r(t) - r^F(0,t) - m(t,t)]\right]$$

$$for$$

$$A(t,T) = \frac{\sigma^2}{4\kappa^3}[(e^{2\kappa t} - 1)(e^{-2\kappa T} - e^{-2\kappa t}) - 4(e^{\kappa t} - 1)(e^{-\kappa T} - e^{-\kappa t})] \qquad \textbf{(147)}$$

$$og$$

$$m(t,t) = \frac{\sigma^2}{\kappa^2}[(1 - e^{-\kappa t}) - \frac{1}{2}(1 - e^{-2\kappa t})] - 1]^2$$

Et interessant spørgsmål kunne være - hvorledes relaterer dette sig til indfaldsvinklen i Jamshidian (1991a)?

Lad os første omskrive formel 146 således:

$$P(t,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)}\exp\left[-\int_t^T\int_0^t \sigma^F(s,v)\sigma_P(s,v)dsdv\right]$$

$$\times \exp\left[-\frac{\int_t^T \sigma^F(0,s)ds}{\sigma^F(0,t)} \times \left[r(t) - r^F(0,t) - \int_0^t \sigma^F(s,t)\sigma_P(s,t)ds\right]\right] \qquad \textbf{(148)}$$

Hvor størrelsen $\frac{\int_t^T \sigma^F(0,s)ds}{\sigma^F(0,t)}$ af Jamshidian (1991a) er benævnt "forward-duration". Dette udtryk kan vises at være identisk med Jamshidians formel 29, således:

$$P(t,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)}\exp\left[-\frac{1}{2}\left[\frac{v(0,t)\int_t^T \sigma^F(0,s)ds}{\sigma^F(0,t)}\right]^2 - \frac{\int_t^T \sigma^F(0,s)ds}{\sigma^F(0,t)}[r(t) - r^F(0,t)]\right] \qquad \textbf{(149)}$$

$$for$$

$$v^2(t,T) = \int_t^T [\sigma^F(t,s)]^2 ds$$

Hvor beviset af pladshensyn overlades til læseren.

Et sidste punkt, der her er interessant at fremhæve, er, at det faktisk kan indses, at formel 147 (og dermed formel 149) er identisk med det analytiske udtryk i Hull og White modellen for $\sigma^F(t,T) = \sigma e^{-\kappa(T-t)}$. Det analytiske udtryk for Hull og White modellen er i Hull (1993) 404 udtrykt således:

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r}$$
$$for$$
$$B(t,T) = \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} \qquad \textbf{(150)}$$
$$og$$
$$\ln A(t,T) = \ln\frac{P(0,T)}{P(0,t)} - B(t,T)\frac{\delta \ln P(0,t)}{\delta t} - \frac{\sigma^2}{4\kappa^3}[e^{-\kappa T} - e^{-\kappa t}]^2[e^{2\kappa t} - 1]$$

Det ville dog have været ækvivalent at have opstillet enten relationen fra formel 147 eller resultatet fra Jamshidian (1991a), da disse udtryk også angiver prisen på en nulkuponobligation under hensyntagen til, at spotrenteprocessen er defineret som: $dr = [\varphi(t) - \kappa r]dt + \sigma dW$.

At vise at formel 147 og 149 er identisk med det analytiske udtryk for Ho og Lee modellen (se Hull (1993) side 403) for $\sigma^F(t,T) = \sigma$ er trivielt og overlades til læseren.

Appendix B

Lad os betragte følgende risikoneutrale stokastiske proces:

$$dr(t) = [\varphi(t) + \kappa r - \Gamma]dt + \sigma(t)dW_t \tag{151}$$

Hvor φ(t) og σ(t) er tidsafhængige parametre.

Formel 151 kan omskrives således:

$$d(e^{kt}r(t)) = e^{kt}[[\varphi(t) - \Gamma]dt + \sigma(t)dW_t] \tag{152}$$

Heraf fås:

$$r(t) = e^{-kt}[r_0 + \int_0^t e^{ks}[[\varphi(s) - \Gamma]ds + \sigma(s)dW_s]] \tag{153}$$

Dette er en gaussisk proces, hvorom det gælder, at:

$$E[r(t)] = e^{-kt}[r_0 + \int_0^t e^{ks}[\varphi(s) - \Gamma]ds]$$

$$og \tag{154}$$

$$V[r(t)] = e^{-2kt}\left(\int_0^t e^{ks}\sigma(s)ds\right)^2$$

Hvor dette indikerer, at afkastet på en t-periode obligation Z(t) = R(t)t kan skrives således:

$$Z(t) = \int_0^t r(s)ds \approx N(m_t, v_t)$$

$$for$$

$$m_t = \int_0^t e^{-kv}[r(0) + \int_0^v e^{ks}[\varphi(s) - \Gamma]ds]dv \tag{155}$$

$$v_t = \int_0^t e^{-2kv}\left(\int_0^v e^{ks}\sigma(s)ds\right)^2 dv$$

Slutteligt kan prisen P(0,t) skrives som:

$$P(0,t) = E[e^{-Z(t)}] = e^{-m_t + \frac{1}{2}v_t} \tag{156}$$

Generelt medfører dette, at der kan opstilles følgende udtryk for prisen P(t,T):

$$\begin{aligned} P(t,T) &= e^{[B(t,T) + B(t,T)r(t)]} \\ &for \\ A(t,T) &= -\int_t^T e^{-k(T-s)}ds \\ B(t,T) &= \frac{1}{2}\int_t^T e^{-2k(T-v)}\left(\int_t^v e^{k(T-s)}\sigma(s)ds\right)^2 dv \\ &- \int_t^T e^{-k(T-v)}\int_t^v e^{k(T-s)}[\varphi(s) - \Gamma]dsdv \end{aligned} \tag{157}$$

Appendix C

Lad os indledningsvis betragte følgende stokastiske proces:

$$dx = \alpha x dt + \sigma\alpha dW \tag{158}$$

Hvor henholdsvis α og σ er de tidshomogene drift- og diffusionskoefficienter og dW er en Wiener proces. Hvis det forudsættes, at λ er markedsrisikoparameteren for x, kan det vises, at en eventuel afledt fordring f(x,t) må tilfredstille følgende partielle differentialligning:

$$f_t(x,t) + xf_x(x,t)[\alpha - \lambda\sigma] + \frac{1}{2}x^2\sigma^2 f_{xx}(x,t) = rf(x,t) \tag{159}$$

Hvor fodtegnene repræsenterer partielle afledte og r er den risikofri rente. Det fremgår heraf, at hvis x er prisen på en aktie der ingen dividende betaler, vil formel 159 reducere til Black og Scholes (1973) partielle differentialligning.

For nærværende vil vi antage, at denne stokastiske proces skal approksimeres ved at anvende

den eksplicitte finite differencemetode[47]. Først defineres et grid i ændringer i x og t, således:

$$\begin{gathered} x_0, x_0 + \Delta x, x_0 + 2\Delta x, \ldots, x_m \\ og \\ t_0, t_0 + \Delta t, t_0 + 2\Delta t, \ldots, T \end{gathered} \tag{160}$$

Hvor x_0 og x_m er henholdsvis den mindste og største værdi for x der vil blive medtaget i approksimationen, t_0 er initial tidspunktet og T kan principielt set forstås som værende identisk med udløbsdatoen på den afledte fordring f(x,t). Lad mig nu definere $t_i = t_0 + i\Delta t$ og $x_j = x_0 + j\Delta x$. Den eksplicitte finite differencemetode resulterer i, at de afledte i formel 159 for node (i-1,j) kan approksimeres ved[48]:

$$\begin{aligned} f_x(x,t) &\approx \frac{f_{i,j+1}(x,t) - f_{i,j-1}(x,t)}{2\Delta x} \\ f_t(x,t) &\approx \frac{f_{i,j}(x,t) - f_{i-1,j}(x,t)}{\Delta t} \\ f_{xx}(x,t) &\approx \frac{f_{i,j+1}(x,t) + f_{i,j-1}(x,t) - 2f_{i,j}(x,t)}{(\Delta x)^2} \end{aligned} \tag{161}$$

Hvilket ved indsættelse i formel 159 og under hensyntagen til, at prisen $f_{i-1,j}(x,t)$ kan bevæge sig til $f_{i,j-1}(x,t)$, $f_{i,j}(x,t)$, $f_{i,j+1}(x,t)$, kan vises at give følgende resultat:

$$\begin{aligned} f_{i-1,j}(x,t) = {} & \frac{f_{i,j-1}(x,t)}{1 + r\Delta t}\left[-\frac{\Delta t x[\alpha - \lambda\sigma]}{2\Delta x} + \frac{1}{2}\frac{\Delta t x^2\sigma^2}{(\Delta x)^2}\right] \\ & + \frac{f_{i,j}(x,t)}{1 + r\Delta t}\left[1 - \frac{\Delta t x^2\sigma^2}{(\Delta x)^2}\right] \\ & + \frac{f_{i,j+1}(x,t)}{1 + r\Delta t}\left[\frac{\Delta t x[\alpha - \lambda\sigma]}{2\Delta x} + \frac{1}{2}\frac{\Delta t x^2\sigma^2}{(\Delta x)^2}\right] \end{aligned} \tag{162}$$

hvor størrelserne kan forstås som henholdsvis sandsynligheden for at bevæge sig fra node (i-1,j) til node (i,j-1) osv, således at følgende omskrivning kan foretages:

---

[47] I praksis er der dog nogle stabilitetsproblemer, hvad angår denne metode. Den er dog kun valgt i og med, at det principielle i denne metode ligger tæt op af det princip, der vil blive anvendt i forbindelse med approksimationen af en tidsafhængig spotrenteproces. I praksis ville det nok for nærværende problem være at foretrække at anvende enten Crank-Nicolson finite differencemetoden eller den implicitte finite differencemetode med en LU dekomponering, se bl.a. Clewlow (1992).

[48] Hvad angår henholdsvis måden hvorpå de afledte bliver approksimeret i henholdsvis Crank-Nicolson metoden og den implicitte metode henvises til Clewlow (1992).

$$f_{i-1,j}(x,t) = \frac{1}{1 + r\Delta t}[p_{i,j-1}f_{i,j-1}(x,t) + p_{i,j}f_{i,j}(x,t) + p_{i,j+1}f_{i,j+1}(x,t)] \qquad \textbf{(163)}$$

For de enkelte sandsynligheder defineret som de respektive kantede paranteser i formel 162. Det kan ud fra dette konkluderes, at $p_{i,j-1}$, $p_{i,j}$ og $p_{i,j+1}$ kan forstås som sandsynlighederne for at bevæge sig fra node (i-1,j) til enkelte nodes (i,j-1), (i,j) og (i,j+1) over perioden Δt og i en verden, hvorom det gælder, at driften er lig $\alpha - \lambda\sigma$. Det ses ud fra dette, at den eksplicitte finite differencemetode er ækvivalent til trinomialgitter approachet.

Fra Hull og White (1990a) vides det, at en tilstrækkelig betingelse for, at denne metode vil konvergere, er, at $p_{i,j-1}$, $p_{i,j}$ og $p_{i,j+1}$ er positive (og pr. definition summer til en (1)) når Δt og $\Delta x \to 0$. Fra formel 162 ses dette at være opfyldt hvis:

$$\begin{gathered} 1 > \frac{\Delta t x^2\sigma^2}{(\Delta x)^2} \\ og \\ -\frac{x^2\sigma^2}{\Delta x} < x[\alpha - \lambda\sigma] < \frac{x^2\sigma^2}{\Delta x} \end{gathered} \qquad \textbf{(164)}$$

Hvor den simpleste procedure for at der kan opnås konvergering er at lade Δt og $\Delta x \to 0$ på en sådan måde, at $\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ forbliver en konstant og er mindre end $\frac{1}{x^2\sigma^2}$, se Hull og White (1990a).

Lad os nu betragte et tilfælde hvor der fra node (i-1,j) kan springes til (i,j-1) ,(i,j) og (i,j+1). Sandsynlighederne for at bevæge sig til hver af disse nodes skal fastlægges på en sådan måde, at middelværdien og variansen af ændringer i x over intervallet Δt er korrekt i grænsen $\Delta t \to 0$. De ligninger der skal være opfyldt er følgende:

$$\begin{gathered} p_{i,j-1}(j - 1)\Delta x + p_{i,j}j\Delta x + p_{i,j+1}(j + 1)\Delta x = E_i[x] \\ p_{i,j-1}(j - 1)^2(\Delta x)^2 + p_{i,j}j^2(\Delta x)^2 + p_{i,j+1}(j + 1)^2(\Delta x)^2 = E_i[x^2] \mp [E_i[x]]^2 \\ p_{i,j-1} + p_{i,j} + p_{i,j+1} = 1 \end{gathered} \qquad \textbf{(165)}$$

For $E_i[x] = x[\alpha - \lambda\sigma]\Delta t \; og \; E_i[x^2] = x^2 ismgsigma^2\Delta t$
sandsynligheder er defineret ved:

$$
\begin{aligned}
p_{i,j-1} &= \frac{1}{2}\left[j^2 + j - [1 + 2j]\frac{E_i[x]}{\Delta x} \pm \frac{[E_i[x]]^2}{(\Delta x)^2} + \frac{x^2\sigma^2\Delta t}{(\Delta x)^2}\right] \\
p_{i,j} &= 1 - j^2 + \frac{2jE_i[x]}{\Delta x} \mp \frac{[E_i[x]]^2}{(\Delta x)^2} - \frac{x^2\sigma^2\Delta t}{(\Delta x)^2} \\
p_{i,j+1} &= \frac{1}{2}\left[j^2 - j + [1 - 2j]\frac{E_i[x]}{\Delta x} \pm \frac{[E_i[x]]^2}{(\Delta x)^2} + \frac{x^2\sigma^2\Delta t}{(\Delta x)^2}\right]
\end{aligned}
\tag{166}
$$

Hvor j = 0 implikerer, at prisen i næste periode enten kan forblive uforandret eller ændre sig med +/- Δx[49].

Et sidste forhold skal her fremhæves. Det er, at Hull og White (1990a) argumenterer for, at det er at foretrække at definere $\frac{x^2\sigma^2\Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \Delta x = x\sigma\sqrt{3\Delta t}$. Dette sikrer neml muligt at finde et j, således at sandsynlighederne er positive.

Nu er den fundamentale ide bag den eksplicitte finite differencemetode blevet specificeret (og derved for trinomialgitter approachet) for det tilfælde, at alle parametrene i den stokastiske proces er tidshomogene, samt under den implicitte antagelse at x følger en geometrisk Wiener proces, dvs x er defineret som processen for aktieprisen i en standard Black og Scholes model.

Lad mig derfor betragte følgende generelle en-faktor spotrenteproces:

$$dr = \mu(\varphi(t),r,t)dt + \sigma(r,t)dW \tag{167}$$

Hvor $\mu(\bullet)$ er driftskoefficienten, der kan være en funktion af tiden og renten samt en tidsafhængig funktion $\varphi(t)$, $\sigma(\bullet)$ er diffusionskoefficienten, der kan være en funktion af tiden og renten, og dW er en Wiener proces med følgende egenskaber $(dW)^2 = dt$, $dtdW = 0$ og $(dt)^2 = 0$.

For at kunne anvende det forrige princip direkte kræver det (eller mere præcist det er mere

---

[49] Dette har den implikation, at hvis gridet bliver valgt således, at $\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{x^2\sigma^2}$ og $\alpha - \lambda\sigma = r$ kan det i at dette vil degenerere til Cox, Ross og Rubensteins (1979) binomialmodel. Da dette betyder, at $p_{i,j} = 0$ (se formel 162) og $\Delta x = x\sigma\sqrt{\Delta t}$ således at restriktionerne i formel 165 kan vises at få følgende udseende:

$$(1 - p)d + pu = E_i[x]$$
$$(1 - p)d^2 + pu^2 = E_i[x^2] - [E_i[x]]^2$$

for $u = x\sigma\sqrt{\Delta t}$ og $d = -x\sigma\sqrt{\Delta t}$. Dette udtryk ses nemt at resultere i Cox, Ross og Rubenstei binomialmodel.

efficient), at volatilitetsparameteren σ(r,t) er konstant[50].

Da det vides, at $\frac{dr}{dW} = \sigma(r,tT)$ $\frac{dW}{dr}$ således at $\frac{1}{\sigma(r,t)}$, er det relevant at defin
nye funktion[51]:

$$xW = \sigma(r(0),0)\int\frac{1}{\sigma(r,t)}dr \qquad \textbf{(168)}$$

Hvor driften for x findes ved anvendelse af Itos lemma, således
$x_t + \mu(\varphi(t),r,t)x_r + \frac{1}{2}\sigma(r,t)^2 x_{rr} = \mu_x$. Processen for x kan hermed indse
form:

$$dx = \left[x_t + \mu(\varphi(t),r,t)\frac{\sigma(r(0),0)}{\sigma(r,t)} - \frac{1}{2}\sigma(r(0),0)\sigma_r(r,t)\right]dt + \sigma(r(0),0)dW = \mu_x dt + \sigma(r(0),0)dW \qquad \textbf{(169)}$$

Lad os nu antage at $\mu(\varphi(t),r,t) = \varphi(t) - \kappa rt$ og at diffusionskoefficienten er uafhæng
renten, således at formel 169 får følgende udseende:

$$dx = \left[x_t + [\varphi(t) - \kappa r]\frac{\sigma(0)}{\sigma(t)}\right]dt + \sigma(0)dW = \mu_x dt + \sigma(0)dW \quad \textbf{(170)}$$
$$for$$
$$x_t = \partial_t\int\frac{\sigma(0)}{\sigma(t)}dr$$

I trinomial approksimationen af dette udtryk vil der ikke blive taget udgangspunkt i metoden fra Hull og White (1993) men derimod den mere efficiente metode fra Hull og White (1994)[52].

I denne procedure konstrueres trinomialgitteret i en to step procedure. Det første step er at konstruere et gitter under hensyntagen til at φ(t) = 0, dvs formel 170 får følgende udseende:

---

[50] Dette gjaldt principielt også for aktiepristilfældet, der indledningsvis blev betragtet, således at den variabel ændring man her ville anvende var $lnx = y$.

[51] Jamshidian (1991b) anvender samme indfaldsvinkel. På nær at han ikke definerer en ny variabel x, men derimod formulerer den med udgangspunkt i Wiener processen W. Dette betyder, at han kan finde driften i spotrenten, da W = 0. Grunden til dette er, at han fokuserer på at konstruere den klasse af spotrentemodeller hvorom det gælder, at r = W(r,t) og som kan identificeres ved en given volatilitetsfunktion σ(r,t).

[52] Det skal lige påpeges, at hvis man alternativt havde valgt at lade markedsrisikoparameteren være tidsafhængig i stedet for at introducere en tidsafhængig parameter direkte i driftsspecifikationen (se afsnit 10), vil det fundamentale i de her anviste fremgangsmetoder ikke ændre sig.

$$dx = \left[x_t - \kappa r\frac{\sigma(0)}{\sigma(t)} - \frac{1}{2}\sigma(0)\sigma_t(t)\right]dt + \sigma(0)dW = \mu_x dt + \sigma(0)dW \qquad \textbf{(171)}$$

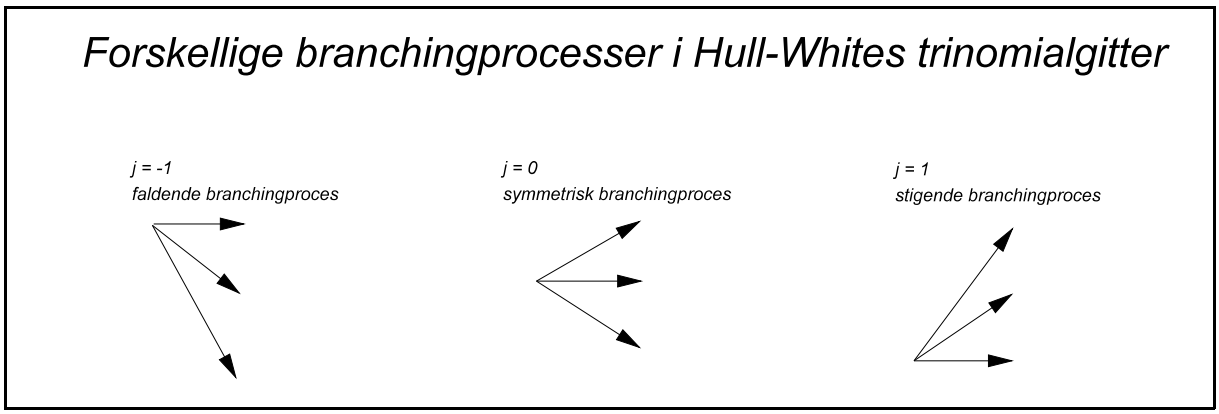
Af praktiske årsager sættes $\Delta x = \sigma(r(0),0)\sqrt{3\Delta t}$. Yderligere er værdierne for x på tidspun
$i\Delta t$ defineret som $j\Delta x$, for $j_{min} \leq j \leq j_{max}$. Hvor j_{min} og j_{max} er henholdsvis det mindste og største j på tidspunkt $i\Delta t$.

Vi definerer nu node (i,j) som den node, hvorom det gælder at $t = i\Delta t$ og $x = j\Delta x$. Det kan nu vises, at de enkelte sandsynligheder kan findes ved anvendelse af formel 166 og under hensyntagen til at j = 0 (dvs den symmetriske branchingproces) , således:

$$\begin{aligned} p_{i+1,j-1} &= \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\left[-\frac{E[x]}{\Delta x} + \frac{[E[x]]^2}{(\Delta x)^2}\right] \\ p_{i+1,j} &= \frac{2}{3} - \frac{[E[x]]^2}{(\Delta x)^2} \\ p_{i+1,j+1} &= \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\left[\frac{E[x]}{\Delta x} + \frac{[E[x]]^2}{(\Delta x)^2}\right] \end{aligned} \qquad \textbf{(172)}$$

For $E[x] = x_t\Delta t - kx\frac{\sigma(0)}{\sigma(t)}\Delta t$, da r = x. Hvor dette udtryk for $\sigma(t) = \sigma$ kan ses at deg
Hull og Whites (1994) formel næst nederst på side 4. I deres approksimering defineres yderligere to branchingprocesser hvorom det gælder, at j er defineret som henholdsvis +1 eller -1. Hvor j = +1 er den stigende branchingproces og j = -1 er den faldende branchingproces. I nedenstående figur er vist udseende på disse branchingprocesser for henholdsvis $j \in \{-1,0,+1\}$[53].

[53] Princippet for at skifte fra den ene branchingproces til den anden kan forklares som følger: der defineres en j_{shift} som den værdi, hvor der skiftes fra den symmetriske til den faldende, og pga gittersymmetrien er $-j_{shift}$ den værdi hvor der skiftes fra den symmetriske til den stigende. Hvor det af Hull og White (1994) er vist, under hensyntagen til, at de enkelte branchingsandsynligheder skal være positive, at j_{shift} er defineret som et heltal mellem $\frac{0.184}{\kappa\Delta t}$ *og* $\frac{1.816}{\kappa\Delta t}$.



Det sidste punkt der nu mangler er at fastlægge den tidsafhængige parameter φ(t) således, at modellen pr. konstruktion fitter initialrentestrukturen. Ideen går her ud på at flytte de enkelte nodes på tidspunkt iΔt med en størrelse φ_i, for alle i < n, således at gitterpriserne matcher priserne på de nulkuponobligationer der udløber på tidspunkt nΔt. Dette gøres ved anvendelse af forwardinduction. Dette princip vil blive gennemgået nedenfor.

Det fremgår ud fra det foregående, at Hull og Whites teknik er mest anvendelig, når det gælder at volatilitetsparameteren er af følgende form $\sigma(r,T) = \sigma r^{o}$, for o ≥ 0 (nul). Da dette betyder, at formel 168 får følgende udseende:

$$x(r) = \begin{cases} \dfrac{r^{1-o}}{1-o} & for\ o \neq 1 \\ \ln r & for\ o = 1 \end{cases} \qquad \textbf{(173)}$$

Lad os derfor kigge på en noget mere generel metode til approksimering af tidsafhængige en-faktor rentestrukturmodeller. Udgangspunktet er her modellen fra Kijima og Nagayama (1995), dog i en mere generel formulering end de betragter.

Først genkaldes processen for x fra formel 158 (dog generaliseret), således:

$$dx = -\kappa x dt + \sigma(x,t)dW \qquad \textbf{(174)}$$

Under den antagelse, at $r(t) = \theta(t) + x(t)$, hvor θ(t) kan forstås som en shift-funktion med den bibetingelse, at θ(0) = r(0), kan det indses, at spotrenteprocessen kan skrives på følgende form:

$$dr = \theta_t(t)dt + dx = [\theta_t(t) + \kappa\theta(t) - \kappa r]dt + \sigma(x,t)dW$$

Under hensyntagen til at driften for spotrenteprocessen i formel 167 er defineret som $\mu(\varphi(t),r,t) = \varphi(t) - \kappa r$, kan det ses, at shift-funktionen θ(t) og volatilitetsparameteren

skal tilfredsstille følgende to relationer[54]:

$$\begin{gathered}\theta_t(t) + \kappa\theta(t) = \varphi(t) \\ og \\ \sigma(x,t) = \sigma(x + \theta(t),t)\end{gathered} \tag{176}$$

I forbindelse med diskretiseringen af formel 174 foretages følgende omskrivning[55]:

$$\Delta x_i = -\kappa_i x_i \Delta t + \sigma(x_i + \theta_i, i\Delta t)\Delta W_\epsilon \tag{177}$$

For $\Delta t = T/n$, $x_i = x(i\Delta t)$, $\kappa_i = \kappa(i\Delta t)$ og $\theta_i = \theta(i\Delta t)$, for i = 0,1,2,.....,n.

Da det haves, at $W_i = W(i\Delta t)$ og $\Delta W_i = W_{i+1} - W_i$ kan følgende omskrivning foretages:

$$\Delta x_{i+1} = [1 - \kappa_i \Delta t]x_i + \sigma(x_i + \theta_i, i\Delta t)\Delta W_i \qquad for\ n\ \varepsilon\ [0,1,2,.....,n-1] \tag{178}$$

Hvis det antages, at der eksisterer et positivt tal α_0, kan følgende sekvens defineres:

$$\alpha_i = \alpha_{i-1}[1 - \kappa_i \Delta t] = \alpha_0 \prod_{a=1}^{n} [1 - \kappa_a \Delta t] \tag{179}$$

Det antages nu, at state (i,j) er statet hvorom det gælder, at $t = i\Delta t$ og $x_{i,j} = j\alpha_{i-1}$.

Eftersom fordelingen af ΔW_i er ens des større volatiliteten er, og des større bevægelsen i x er, introduceres en positiv heltal step-størrelsesfunktion $\beta_{i,j}$, som angiver stødet til α. Hvor dette betyder, at $x_{i+1,j}$ kan antages at være defineret ved følgende diskrete proces:

$$x_{i+1,j} = \begin{cases} [1 - \kappa_i \Delta t]x_{i,j} + \beta_{i,j}\alpha_i & med\ ssh.\ p_{i,j} \\ [1 - \kappa_i \Delta t]x_{i,j} & med\ ssh.\ 1 - 2p_{i,j} \\ [1 - \kappa_i \Delta t]x_{i,j} - \beta_{i,j}\alpha_i & med\ ssh.\ p_{i,j} \end{cases} \tag{180}$$

[54] Det kan i den forbindelse vises, at når $\sigma(x,t) = \sigma$ haves et analytisk udtryk for rentestrukturen i hvert eneste node i trinomialgitteret. Hvor dette udtryk er identisk med formel 8 i Appendix A for $r^F(0,t)$ udskiftet med $\theta(t)$, hvilket også kan ses at være identisk med formel 12 i Kijima og Nagayama (1995). De udleder dog deres udtryk på en anden måde end den jeg har brugt i Appendix A.

[55] Hvor dette udtryk kan ses at være defineret som om κ også er tidsafhængig.

Hvor $p_{i,j}$ og $\beta_{i,j}$ skal tilfredsstille variansbetingelsen:

$$p_{i,j} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sigma(x_{i,j} + \theta_i, i\Delta t)}{\beta_{i,j}\alpha_i}\right]^2 \Delta t \qquad \textbf{(181)}$$

Da $0 \le p_{i,j} \le 1/2$ betyder det, at $\beta_{i,j} \ge \dfrac{\sigma(x_{i,j} + \theta_i, i\Delta t)\sqrt{\Delta t}}{\alpha_i}$ som indikerer, at $\beta_{i,j}$ er sti

stigningen i $\sigma(x_{i,j} + \theta_i, i\Delta t)$.

Når $\beta_{i,j}$ er kendt, er sandsynligheden $p_{i,j}$ kendt fra varianskriteriet.

Da $[1 - \kappa_i\Delta t]x_{i,j} = j\alpha_i$ og pga formel 179 betyder det, at node (i,j) brancher til node (i + $\beta_{i,j}$), (i + 1,j), (i + 1, j -$\beta_{i,j}$), således:

$$(i,j) = \begin{cases} (i + 1, j + \beta_{i,j}) & \textit{med ssh. } p_{i,j} \\ (i + 1, j) & \textit{med ssh. } 1 - 2p_{i,j} \\ (i + 1, j - \beta_{i,j}) & \textit{med ssh. } p_{i,j} \end{cases} \qquad \textbf{(182)}$$

Udover variansbetingelsen defineres følgende restriktioner på step-størrelsesfunktionen:

$$\begin{aligned} \alpha_i(j + \beta_{i,j}) &\ge j\alpha_{i-1} \\ \alpha_i(j - \beta_{i,j}) &\le j\alpha_{i-1} \end{aligned} \qquad \textbf{(183)}$$

som for $x_{i,j} = j\alpha_{i-1}$ betyder, at der er følgende restriktion på step-størrelsesfunktionen[56]:

$$\beta_{i,j} \ge \frac{|j|\kappa_i\Delta t}{1 - \kappa_i\Delta t} \qquad \textbf{(184)}$$

Hvor $\beta_{i,j}$ kan antage et hvilken som helst positivt heltal der tilfredsstiller[57] formel 184 og

---

[56] Formel 184 fremkommer på følgende måde: da $\alpha_i = \dfrac{(1 - \kappa_i\Delta t)x_{i,j}}{j}$ og $x_{i,j} = j\alpha_i$ følger det fra formel 183, at $\beta_{i,j} = \dfrac{|j|}{1 - \kappa_i\Delta t} - |j|$ hvor formel 184 følger direkte.

[57] Som påpeget af Hull og White (1990a)/(1993)/(1994) er det ønskværdigt i en trinomialmodel at sætte branchingsandsynligheden omkring 1/6, således at den ene restriktion for step-størrelsesfunktionen bliver af følgende udseende $\beta_{i,j} \ge \dfrac{\sigma(x_{i,j} + \theta_i, i\Delta t)\sqrt{3\Delta t}}{\alpha_i}$.

$$\beta_{i,j} \geq \frac{\sigma(x_{i,j} + \theta_i, i\Delta t)\sqrt{\Delta t}}{\alpha_i} \quad .$$

Det ses tydeligt ud fra det forrige, at det er muligt at fastlægge langt flere forskellige diffusionskoeffcienter end i Hull og Whites diskretiseringsformulering. Dette da det ikke er nødvendigt at tage hensyn til det forhold, at et analytisk udtryk til formel 168 skal eksistere i og med, at der ikke foretages nogen variabel ændring i Kijima og Nagayamas model.

Det sidste punkt er, hvorledes kalibreringen af trinomialgitteret foretages således, at den tidsafhængige driftsparameter ($\theta(t)$ i Kijima og Nagayama modellen og $\varphi(t)$ i Hull og White modellen) skal fastlægges, for at trinomialmodellen pr. konstruktion matcher initialrentestrukturen.

Dette vil blive gjort med udgangspunkt i Kijima og Nagayamas model, men det fundamentale i princippet er selvfølgelig også anvendeligt for Hull og Whites model.

Lad os første definere $P(i\Delta t)$ som den aktuelle pris på den nulkuponobligation, der udløber på tidspunkt $i\Delta t$, og $Q_{i,j}$ som værdien af et aktiv der betaler 1 krone, hvis vi når node (i,j) og nul (0) hvis ikke vi når node (i,j)[58].

Det antages nu, at gitteret er genereret op til tidspunkt $i\Delta t$. Lad nu $q_{i,k,j}$ være transitionssandsynlighederne fra node (i,k) til node (i + 1,j). Da det gælder, at node (i + 1,j) nås efter node (i,j) med sandsynligheden $p_{i,k}$, $1 - 2p_{i,k}$ eller $p_{i,k}$, hvis og kun hvis $j = k - \beta_{i,k}$, $k = j$ eller
$j = k + \beta_{i,k}$, har vi:

$$q_{i,k,j} = \begin{cases} p_{i,k} & \textit{hvis } j = k + \beta_{i,k} \textit{ eller } j = k - \beta_{i,k} \\ 1 - 2p_{i,k} & \textit{hvis } k = j \\ 0 & \textit{ellers} \end{cases} \qquad \textbf{(185)}$$

$Q_{i+1,j}$ bliver beregnet i takt med, at gitteret bliver konstrueret ud fra følgende relation:

$$Q_{i+1,j} = \sum_{j_{\min} \leq j \leq j_{\max}} Q_{i,k} q_{i,k,j} e^{-r_{i,k}\Delta t} \qquad \textbf{(186)}$$

Hvor j_{max} og j_{min} er henholdsvis det maksimale og det minimale j på tidspunkt i.

[58] Det fremgår heraf, at $Q_{i,j}$ er et Arrow-Debreu aktiv, hvor Arrow-Debreu prisen er den diskrete-tids-version af Greens funktion.

Eftersom $r_{i,j} = x_{i,j} + \theta_i$ betyder det, at når θ_i bliver fastlagt, er $Q_{m,j}$ kendt for alle $m \leq i + 1$.

Fra definitionen af Q haves at:

$$P((i+2)\Delta t) = \sum_{j_{\min} \leq j \leq j_{\max}} Q_{i+21,j} \tag{187}$$

Ved at udskifte i med i + 1 i formel 186 og indsætte i formel 187 kan følgende udtryk for $P((i+2)\Delta t)$ findes:

$$P((i+2)\Delta t) = e^{-\theta_{i+1}\Delta t} \sum_{j_{\min} \leq j \leq j_{\max}} Q_{i+1,j} e^{-x_{i+1,j}\Delta t} \tag{188}$$

Hvilket betyder, at følgende udtryk kan findes for θ_{i+1}:

$$\theta_{i+1} = -\frac{1}{\Delta t} \ln\left[\frac{P((i+2)\Delta t)}{\sum_{j_{\min} \leq j \leq j_{\max}} Q_{i+1,j} e^{-x_{i+1,j}\Delta t}}\right] \tag{189}$$

Hvor det ud fra det forrige kan ses, at det her anviste princip til fastlæggelse af shift-funktionen er ved anvendelse af forwardinduction. Yderligere fremgår det, at formel 189 repræsenterer et analytisk udtryk for shift-funktionen for hver eneste "i" hvilket i kalibreringen af gitteret klart forøger hastigheden[59].

[59] Det kan slutteligt nævnes, at hvis $\kappa = 0$, $p_{i,j} = 1/2$ og $\sigma(r,t) = \sigma$ vil trinomialgitteret degenerere til et binomialgitter, og vil mere præcist være identisk med binomialgitteret fra Jamshidian (1991b) under hensyntagen til, at spotrenten er defineret som i den kontinuerte version af Ho og Lee (1986) modellen.