RENTESTRUKTUREN OG FORVENTNINGSHYPOTESERNE:

EN BETRAGTNING UNDER USIKKERHED

Claus Madsen
version 11. januar 1994

e-mail: cam@fineanalytics.com

Rentestrukturen og forventningshypoteserne: en betragtning under usikkerhed

1: Indledning

I dette arbejdspapir vil jeg analysere sammenhængen imellem de forskellige forventningshypoteser, der i tidens løb er blevet foreslået i litteraturen, og vise at "the local expectations hypothesis" (LEH) er den eneste af disse fire hypoteser, som er forenelig med en ligevægtsbetragtning for rentestrukturen.

Som basis for dette bevis, vil jeg tage udgangspunkt i Cox, Ingersoll og Ross`s 1985[1], og herunder vise hvilke implicitte prisfastsættelsesantagelser, der ligger til grund for de fire hypoteser, både i kontinuerlig og diskret tid.

I afsnit 2 vil jeg gennemgå rentestrukturens egenskaber i en deterministisk verden, derefter vil jeg i afsnit 3 opstille en valid stokastisk model for rentestrukturen. I afsnit 4 vil jeg gennemgå og sammenligne de enkelte teorier, og herunder konkludere, hvilken af de gennemgåede hypoteser, der er valid i en ligevægtsbetragtning for rentestrukturen. I afsnit 5 vil jeg foretage nogle betragtninger om rentestrukturen og risikopræmien.

2: Rentestrukturbetragninger i en deterministisk verden

[1] Se arbejdspapiret "Prisfastsættelse af obligationer i kontinuerlig tid", for en gennemgang af Cox, Ingersoll og Ross`s model.

I en verden uden usikkerhed - dvs, en deterministisk verden - vil alle de fremtidige renter med sikkerhed være kendte, således at den generelle ligevægtsbetingelse kan skrives som:

$$r^F(0,\tau,\tau+\alpha) = r_{\tau,\alpha} \quad \text{for alle} \quad \tau \leq \tau+\alpha \quad \text{hvor} \quad \alpha \geq 0 \tag{1}$$

Denne formel skal forstås således: $r^F(0,\tau,\tau+\alpha)$ er den forwardrente fra tidspunkt τ til $\tau+\alpha$, som implicit er indeholdt i spotrentestrukturen på tidspunkt 0, og hvor $r_{\tau,\alpha}$ er den på tidspunkt τ aktuelt observerede spotrente for perioden α, eller sagt på en anden måde - de i initial tidspunktet implicitte forwardrenter er equivalente med de faktisk observerede fremtidige spotrenter.

Hvis denne relation ikke er opfyldt, vil investor kunne realisere en risikofri gevinst ved en passende strategi. Hvis eksempelvis $r^F(o,\tau,\tau+\alpha) \geq r_{\tau,\alpha}$, vil investor kunne sælge en nulkuponobligation med en løbetid lig τ, og købe $1 + r^F(0,\tau,\tau+\alpha)$ nulkuponobligationer, som udløber på tidspunkt $\tau+\alpha$. Det vil pr. definition medføre at initial investeringen er lig nul. Dette er tilfældet pga følgende relation:

$$r^F(o,\tau,\tau+\alpha) = \frac{P(o,\tau)}{P(o,\tau+\alpha)} - 1 \tag{2}$$

$P(o,\tau)$ og $P(o,\tau+\alpha)$ er henholdsvis prisen på en nulkuponobligation med udløb på tidspunkt τ og $\tau+\alpha$.

Dette udtryk medfører, at den totale position kan skrives som:

$$P(o,\tau) - (1 + r^F(o,\tau,\tau+\alpha))P(0,\tau+\alpha) = 0 \tag{3}$$

På tidspunkt τ vil investor skulle aflevere 1 kr. og endvidere vil værdien af den frasolgte nulkuponobligation, med udløb på tidspunkt $\tau + \alpha$ på tidspunkt τ, have en værdi lig $1/r_{\tau,\alpha}$, således at nettopositionen på tidspunkt τ kan skrives således:

$$\frac{1+r^F(0,\tau,\tau+\alpha)}{1+r_{\tau,\alpha}} - 1 \geq 0 \quad \text{da} \quad r^F(o,\tau,\tau+\alpha) \geq r_{\tau,\alpha} \tag{4}$$

Hvis derimod $r_{\tau,\alpha} \geq r^F(o,\tau,\tau+\alpha)$, vil der kunne opnås en risikofri gevinst ved at købe en nulkuponobligation, som udløber på tidspunkt τ og sælge $1 + r^F(o,\tau,\tau+\alpha)$ enheder af en nulkuponobligation, der udløber på tidspunkt $\tau+\alpha$.

Heraf kan det udledes, at ligevægtsbetingelsen i formel 1 er valid. Dette indikerer endvidere, at formel 1 alternativt vil kunne skrives således:

$$P(o,T) = \frac{1}{[(1 + r_{0,1})(1 + r_{1,2})(1 + r_{2,3}) \ \ldots\ldots \ (1 + r_{T-1,T})]} \tag{5}$$

Dette udtryk viser, at en investering i en nulkuponobligation, med udløb på tidspunkt T, er equivalent med en kædeinvestering i en serie af 1-periode nulkuponobligationer over den samme investereingsperiode.

Afkastet over investeringshorisonten kan findes ved at tage den reciprokke værdi i formel 5. Dette afkast kunne alternativt udtrykkes ved den effektive rente, således:

$$1 + Y(o,T) = [(1 + r_{o,1})(1 + r_{1,2})(1 + r_{2,3}) \dots\dots\dots (1 + r_{T-1,T})]^{\frac{1}{T}} \tag{6}$$

Det er endvidere muligt at udlede følgende relation udfra formel 5:

$$\frac{P(o,\tau)}{P(0,\tau+\alpha)} = 1 + r_{\tau,\alpha} \tag{7}$$

som viser, at det realiserede afkast på enhver nulkuponobligation, over en hvilken som helst periode, er lig den implicitte forwardrente for omhandlende periode + 1.[2]

Nu da disse grundlæggende egenskaber er blevet defineret, vil jeg fortsætte med en opstilling af en dynamisk model for rentestrukturen, før jeg går over til den egentlige gennemgang af de enkelte hypoteser under usikkerhed.

3: En dynamisk model for rentestrukturen

Jeg vil nu opstille en en-faktor kontinuerlig model for rentestrukturen[3], hvor denne ene faktor er den risikofri rente.[4]

Det antages her, at den risikofri rente følger en stokastisk proces af Ito-typen således;

$$dr(t) = \mu(r,t)dt + \sigma(r,t)dW \tag{8}$$

hvor μ(r,t) som er kendt på tidspunkt t er driftskoefficienten, σ(r,t) som også er kendt på

[2] Dette vil også kunne ses ved at betragte formel 2.

[3] De kontinuerlige betragtninger, som her bliver gennemgået, er udarbejdet med udgangspunkt i arbejdspapiret "Prisfastsættelse af obligationer i kontinuerlig tid".

[4] Ud over det umiddelbare indlysende i at vælge den risikofri rente, som denne ene faktor er der også en teknisk fordel herved. Dette da det kan vises, at den risikofri rente under alle omstændigheder vil indgå i den fundamentale partielle diffferentialligning uanset om den er valgt som tilstandsvariabel eller ej; se arbejdspapiret "Prisfastsættelse af obligationer i kontinuerlig tid" for en uddybning af dette forhold.

tidspunkt t er diffusionskoefficienten, og dW som er en wiener proces med følgende egenskaber: $(dW)^2 = dt$, $dtdW = 0$ og $(dt)^2 = 0$.

Hvis det antages, at der eksisterer en fordring P, som kun er afhængig af r og t, vil P(r,t) ifølge Ito-lemma[5] tilfredsstille følgende partielle differentialligning (PDE):

$$dP(r,t) = \left[\frac{\delta P}{\delta t} + \frac{\delta P}{\delta r}\mu(r,t) + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 P}{\delta r^2}\sigma^2(r,t) \right] dt + \frac{\delta P}{\delta r}\sigma(r,t)dW \tag{9}$$

Ved anvendelse af det risikofri arbitrageargument[6], kan den søgte parabolske differentialligning, som alle fordringer P(r,t) skal tilfredsstille for at udelukke arbitrage muligheder, formuleres som:

$$\frac{\delta P}{\delta t} + \frac{\delta P}{\delta r}\left[\mu(r,t) - \Gamma\sigma\right] + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 P}{\delta r^2}\sigma^2(r,t) - rP = 0 \tag{10}$$

Denne udledning er blevet udledt under den antagelse, at den stokastiske tilstandsvariabel ikke var en "observerbar"[7] fordring, eftersom "markeds-risiko"-parameteret Γ indgår i den fundamentale partielle differentialligning.

En række studier i litteraturen har udledt udtryk af samme form, som formel 10, f.eks. Brennan og Schwartz 1979 og Vasicek 1977. I disse modeller er risiko-faktor-parameteret (Γ) bestemt eksogent.

En anden metode, som resulterer i den samme fundamentale differentialliging, er blevet anvendt af Cox, Ingersoll og Ross. I deres studier, opstiller de en intertemporal ligevægtsmodel, som inkorporerer forskellige økonomiske variable, herunder renten og risiko-faktor-parameteret - som her bliver bestemt endogent i modellen ved anvendelse af nytteteorien.

Den reelle Cox, Ingersoll og Ross model fås herefter ved at sætte $\mu(r,t) = \alpha(\beta - r)$ og $\sigma(r,t) = \sigma r^{0.5}$ i formel 8, således;[8]

---

[5] Se afsnit 3 i arbejdspapiret "Estimation af rentestrukturen; en betragtning i kontinuerlig tid", for en formel udledning af Ito-lemma.

[6] Se arbejdspapiret "Prisfastsættelse af obligationer i kontinuerlig tid" for en uddybning af det risikofri arbitrageargument.

[7] Se arbejdspapiret "Prisfastsættelse af obligationer i kontinuerlig tid" for en nærmere forklaring på udledelsen af den grundlæggende partielle differentialligning, hvis den stokastiske tilstandsvariabel er en "observerbar" fordring. Det skal dog her nævnes, at udtrykket "observerbar" fordring er her anvendt til at definere om en fordring er handlebar. I den forbindelse skal det pointeres, at renter, inflationssatser ol. ikke er at betragte som "observerbare" fordringer.

[8] Deres model er en såkaldt square-root-model.

$$dr(t) = \alpha[\beta - r]dt + \sigma\sqrt{r}dW \tag{11}$$

Her korresponderer α, β > 0 til en kontinuerlig tids første ordens auto-regressiv proces (mean-reversion), hvor de tilfældige rentebevægelser konvergerer mod en langsigtet værdi β - altså α(β - r) repræsenterer driften i r. Parameteren α bestemmer med hvilken hastighed denne konvergering foregår.

Dette medfører, at formel 10 får følgende udseende;[9]

$$\frac{\delta P}{\delta t} + \frac{\delta P}{\delta r}[\alpha[\beta - r] - \lambda r] + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 P}{\delta r^2}\sigma^2 r - rP = 0 \tag{12}$$

Γ = λr/σ er her blevet defineret med udgangspunkt i nytteteorien.

4: Rentestrukturen og forventningshypoteserne

I en økonomi, hvor der er usikkerhed om de fremtidige renter, er det ikke sikkert, at de i afsnit 2 opstillede relationer vil holde. En række forskellige teorier er derfor, i tidens løb, blevet foreslået til en beskrivelse af relationerne imellem nulkuponobligationer med forskellige løbetider.

Forventningsteorien, som reelt set ikke kun er en teori - men faktisk fire teorier, som ofte bliver sammenblandet og misforstået, vil her blive gennemgået. De fire forventningsteorier er:

1: The unbiased expectations hypothesis (UEH)

2: The return-to-maturity expectations hypothesis (RTM-EH)

3: The yield-to-maturity expectations hypothesis (YTM-EH)

4: The local expectations hypothesis (LEH)

Ad 1: The unbiased expectations hypothesis (UEH)

UEH har som basis relation formel 2, $E(r_{t,\alpha}) = r^F(0,t,t+\alpha)$ for alle $t \leq t+\alpha$ hvor $\alpha \geq 0$. Ved at betragte formel 5, kan følgende formel, for obligationsprisen i en økonomi under UEH,

[9] For en uddybende diskussion og forklaring af egenskaberne ved denne funktion, kan henvises til følgende arbejdspapirer: 1. "Prisfastsættelse af obligationer i kontinuerlig tid" og 2. "En sammenligning af alternative rentestruktur-parameteriseringer". I det først nævnte arbejdspapir er endvidere givet en begrundelse for hvorledes denne partielle differentialligning fremkommer.

udledes:

$$P(0,T) = \frac{1}{[(1 + r_{o,1})E(1 + r_{1,2})E(1 + r_{2,3}) \ ....\ E(1 + r_{T-1,T})]} \qquad \textbf{(13)}$$

Det vil sige, at ligevægtsantagelsen for UEH er, at de implicitte forwardrenter er de forventede spotrenter, som er equivalente med de faktisk observerbare fremtidige spotrenter.

Hvis man nu forestiller sig, at rentestrukturens dynamik kan specificeres ved et binomialgitter i den korte rente, vil UEH have følgende implikation for prisbestemmelsen på en T-årig nulkuponobligation: "på hver eneste tidspunkt "n" findes den forventede rente, ved anvendelse af Pascalls trekant, på de enkelte states "i", givet "n", mulige renter; dette vil resultere i, at der bliver opstillet en vektor af forventede fremtidige korte renter. Prisen findes herefter ved at succesivt rulle den T-årige obligation ned af denne forventede rente-vektor".

I kontinuerlig tid kan denne hypotese formuleres således:

$$P(0,T) = e^{-\int_0^T E[r_s]ds} \qquad \textbf{(14)}$$

Ad 2: The Return-to-maturity expectations hypothesis (RTM-EH)

RTM-EH tager sit udgangpunkt i den reciprokkeværdi til formel 5 og får derfor følgende udseende:

$$\frac{1}{P(o,T)} = E\ [(1 + r_{0,1})(1 + r_{1,2})(1 + r_{2,3}) \ ....\ (1 + r_{T-1,T})] \qquad \textbf{(15)}$$

Det kan hermed udledes, at ligevægtsantagelsen for RTM-EH er, at en investering i en nulkuponobligation med løbetid lig T er det samme, som at rulle en serie af 1-periode nulkuponobligationer over den samme investeringsperiode.

I en binomialmodel, vil denne hypotese have følgende implikationer for prisfastsættelsen på en T-årig nulkuponobligation: "for hver eneste mulige rentestruktur evolvering i gitteret, findes prisen på en T-årig nulkuponobligation i initialtidspunktet. Herefter findes den reelle pris, som et simpelt gennemsnit af disse priser".

I kontinuerlig tid kan denne hypotese formuleres således:

$$\frac{1}{P(0,T)} = E\left[e^{\left(\int_0^T r_s ds\right)}\right] \qquad \textbf{(16)}$$

Ad 3: The Yield-to-maturity expectations hypothesis (YTM-EH)

YTM-EH antager, at den effektive rente over investeringshorisonten er garanteret, dvs, at den effektive rente på en nulkuponobligation med en løbetid på T, vil være lig den effektive rente, som vil opnås ved at rulle en serie af 1-periode nulkuponobligationer. Dette betyder, at YTM-EH har formel 6, som sin basis relation, således:

$$1 + Y(o,T) = E\left[(1+r_{o,1})(1+r_{1,2})(1+r_{2,3})\ \ldots\ldots\ldots\ (1+r_{T-1,T})\right]^{\frac{1}{T}} \tag{17}$$

I en binomialmodel vil prisen på en T-årig nulkuponobligation, givet YTM-EH blive fundet således: "værdien af denne T-årige nulkuponobligation bliver fundet ved at beregne nutidsværdien af den effektive nulkuponrente, der er defineret som et gennemsnit af alle de i initialtidspunktet mulige effektive renter. Antallet af mulige effektive renter er fundet ud fra de nulkuponpriser, der forekommer ved at beregne prisen i initialsituationen for alle de forskellige veje i gitteret, hvor antallet af mulige veje er givet ved 2^n, og n er antal steps i binomialtræet".

I kontinuerlig tid kan denne hypotese formuleres således[10]:

$$-\frac{\ln(P(0,T))}{T} = E\left[\frac{1}{T}\int_0^T r_s\,ds\right] \tag{18}$$

Ad 4: The local expectations hypothesis (LEH)

LEH bygger på relationen givet ved formel 7. Under denne hypotese antages det, at det forventede afkast på enhver obligation over en enkel periode er givet ved denne periodes faktiske spotrente, og hvor det vil være naturligt at vælge den korteste periode, dvs for α gående mod 0.

Dette betyder, at LEH kan skrives således:

$$r_{T,\alpha} = E\left(\frac{P(o,T) - P(o,T+\alpha)}{P(0,T+\alpha)}\right) \tag{19}$$

Eftersom der her forudsættes, at det forventede afkast på alle obligationer, over et uendeligt

[10] Ved at sammenligne formel 18 med 14 er det indlysende at se, at i kontinuerlig tid er UEH equivalent med YTM-EH, som har den implikation, at jeg i den efterfølgende fremstilling i kontinuerlig tid ikke vil skelne imellem disse to hypoteser.

kort tidsinterval, er lig den risikofri rente, er denne hypotese i visse tilfælde blevet kaldt for den "risiko-neutrale-forventnings-hypotese"; det er dog ikke tilfældet, at formel 19 er en konsekvens af universal risiko neutralitet som i afsnit 5 vil blive diskuteret.

I en binomialmodel vil dette medføre, at prisen på en nulkuponobligation, med løbetid lig T, bliver fundet på følgende måde: "på hver eneste state "i", givet "n", findes på dette knudepunkt den forventede pris, som et simpelt gennemsnit af de 2 mulige priser. Disse 2 priser er fundet ved at tilbagediskontere de 2 mulige fremtidige priser med den i dette knudepunkt gældende spotrente. Det kan hermed konkluderes, at prisfastsættelsen foregår ved et såkaldt "backward-induction" princip[11]".

I kontinuerlig tid kan denne hypotese formuleres således:

$$P(0,T) = E\left[e^{-\int_0^T r_s ds}\right] \tag{20}$$

Ved at foretage følgende definition:

$$X = e^{-\int_0^T r_s ds} \tag{21}$$

er det nu muligt at omskrive de 4 hypoteser (i kontinuerlig tid dog kun 3 forskellige) på en alternativ måde:

$$\begin{array}{ll} \text{UEH ; YTM-EH:} & \ln P(o,T) = E[\ln X] \\ \text{RTM-EH:} & \dfrac{1}{P(o,T)} = E[\frac{1}{X}] \\ \text{LEH:} & P(o,T) = E[X] \end{array} \tag{22}$$

Ved anvendelse af Jensens ulighed er det nu tydeligt at se, at disse hypoteser gensidigt udelukker hinanden. Ved anvendelse af Jensens ulighed, fås endvidere følgende rangordning, hvad angår priserne udledt under de 3 forskellige hypoteser, $P_{LEH} > P_{YTM\text{-}EH}, P_{UEH} > P_{RTM\text{-}EH}$.

Jeg vil starte min gennemgang med at knytte nogle bemærkninger til afsnit 3.

Ved at udtrykke risikoparameteret således:

$$\Gamma = \frac{\mu - r}{\sigma} \tag{23}$$

[11] Der er, som det fremgår af denne beskrivelse, antaget at binomialsandsynligheden er lig 0.5. Udover at være det mest naturlige valg, er det også det valg som resulterer i den hurtigste konvergering i forbindelse med calibreringen af binomialgitteret, se Jamshidian 1991.

Derved risikopræmien, som $\Gamma\sigma P_r(0,t)/P(0,t)$[12], og eftersom afkastet på alle obligationer er fuldstændig perfekt korreleret, vil risikopræmiens løbetidsafhængighed være nødvendig at bestemme endogent i modellen.

Hvis processen endvidere er tids-homogen, som det er tilfældet her da μ og σ er tidsuafhængige, vil obligationernes forventede afkast ikke afhænge eksplicit af kalendertiden, dog vil afkastet selvfølgelig afhænge af restløbetiden. I dette tilfælde vil risikopræmien kun afhænge af renten og restløbetiden.

Formel 12 er af samme form som den, der ville fremkomme for den modificeret proces:

$$dr(t) = [\mu(r,t) - \Gamma\sigma]dt + \sigma(r,t)dW \qquad (24)$$

hvis den lokale forventningsteori er valid.

Dette har den implikation, at den formelle løsning er givet ved formel 20, og hvor forventningsoperatoren er taget med hensyn til den modificerede stokastiske proces i formel 24. Det betyder altså, at for renterisiko antager den lokale forventningsteori, at prisen findes i overensstemmelse med Cox-Ross-Merton`s risiko-neutrale-valueringsargument.

Det skal hertil siges, at den forventnings-prisfastsættelses-hypotese, som implicit ligger i formel 24, ikke indikerer at den omhandlende hypotese er valid, men kun er en belejlig formulering helt i stil med det risiko-neutrale valueringsargument for optionsteorien. Det er faktisk således, at den lokale forventningsteori kun er valid for $\Gamma = 0$[13].

Det afgørende punkt for en hypoteses validitet, ligger i den egenskab om den pågældende hypotese er konsistent med det risikofri-arbitrage-argument. Det kunne derfor være interessant at få defineret denne generelle ligevægtsbetingelse. Det risikofri-arbitrage-argument kan som vist i arbejdspapiret "Prisfastsættelse af obligationer i kontinuerlig tid", formuleres således:

$$\mu = r - \Gamma\sigma \qquad (25)$$

Denne formel viser, at risikopræmien kan betragtes som værende defineret ved en lineær model i n-faktorer (her en), en for hver eneste usikkerhed, og hvor hver enkelt komponent i risikopræmien er givet ved produktet af den pågældende risikofaktors kvantitet (σ), og ligevægts kompensationerne for at påtage sig den omhandlende risikoeksponering (Γ).

Med denne helt fundamentale egenskab kan jeg godt gå videre med den egentlige sammenligning.

[12] For en gennemgang af udledningen af risikoparameteret henvises til arbejdspapiret "Prisfastsættelse af obligationer i kontinuerlig tid".

[13] Se Cox, Ingersoll og Ross 1981 afsnit IV, for et formelt bevis herfor.

Det er dog allerede på dette tidspunkt muligt at konkludere, at den lokale forventningsteori er helt i overensstemmelse med det risikofri-arbitrage-argument, og vil være valid for $\Gamma = 0$. Det ville altså princippielt allerede nu være muligt at forkaste de andre hypoteser i henhold til Jensens ulighed, men jeg vil nu prøve at undersøge under hvilke antagelser de andre hypoteser er valide.

Før jeg går videre i den egentlige diskussion af de enkelte hypoteser, vil jeg opstille en simpel model for rentedynamikken, som kan være interessant i den henseende, at den vil kunne give en intuitiv måde at betragte forskellen imellem de enkelte hypoteser på. Jeg vil som udgangspunkt i min analyse, antage at den lokale forventningsteori er valid.

Det antages nu, at spotrenten følger en random-walk, altså:

$$
\begin{aligned}
dr &= \mu_M dt + \sigma dW \\
&\text{og} \\
dP &= \mu_P P dt + \sigma_P P dW \\
&\textit{for} \\
\mu_P &= P_t + P_r \mu_M + \frac{1}{2} P_{rr} \sigma^2 \\
\sigma_P &= P_r \sigma
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Som ved anvendelse af Ito-lemma og det risikofri-arbitrage argument, kan vises at ville resultere i følgende partielle differentialligning:

$$
\frac{\delta P}{\delta t} + \frac{\delta P}{\delta r}\mu_M + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 P}{\delta r^2}\sigma^2 - rP = 0 \tag{27}
$$

Denne partielle diffentialligning fremkommer, da jeg har antaget, at den lokale forventningsteori er valid, der som bekendt betyder, at processens drift er givet ved $\mu_M = \mu - \Gamma\sigma$.

Man kan nu se[14] at løsningen til denne stokastiske proces kan findes ved at gætte på følgende funktionelle form for prisen på en nulkuponobligation[15];

$$
P(o,\tau) = e^{-r\tau + f(\tau)} \tag{28}
$$

Dette har følgende implikation for de partielle afledte i formel 27:

---

[14] Se Ingersoll maj 1980, Class Note no. 14, "The term structure of interest rates", University of Chicago.

[15] Jeg har her transformeret den partielle differentialligning fra formel 27 til at være en funktion af obligationens restløbetid (her udtrykt ved tau) istedet for en funktion af kalendertiden t. Dette medfører, da en "udvidelse" af kalendertiden resulterer i et fald i restløbetiden, at obligationsprisens afhængighed til ændringer i restløbetiden får et negativt fortegn.

$$\begin{aligned}\frac{\delta P(o,\tau)}{dr} &= -\tau P(o,\tau)\\ \frac{\delta^2 P(o,\tau)}{dr^2} &= \tau^2 P(o,\tau)\\ \frac{\delta P(o,\tau)}{d\tau} &= \left(r - \frac{\delta f(\tau)}{d\tau}\right) P(o,\tau)\end{aligned} \tag{29}$$

Ved indsættelse i formel 27, er det nu muligt at få defineret den funktionelle form for f(τ), således:

$$\begin{aligned}&\left[\frac{1}{2}\sigma^2\tau^2 - \mu_M\tau - r + r - \frac{\delta f(\tau)}{d\tau}\right] P(o,\tau) = 0 \Rightarrow\\ &\frac{\delta f(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{2}\sigma^2\tau^2 - \mu_M\tau\end{aligned} \tag{30}$$

Før det endelige udtryk for prisen på en nulkuponobligation kan skrives, er det nødvendigt at integrere f(τ) over intervallet 0 til τ, som vil resultere i følgende udtryk for f(τ):

$$f(\tau) = \frac{1}{6}\sigma^2\tau^3 - \frac{1}{2}\mu_M\tau^2 \tag{31}$$

Dette medfører at prisfunktionen bliver af følgende udseende:

$$P(o,\tau) = e^{-\left[r\tau + \frac{1}{2}\mu_M\tau^2 - \frac{1}{6}\sigma^2\tau^3\right]} \tag{32}$$

Med udgangspunkt i denne prisfunktion, er det nu muligt at betragte forskellen imellem de forskellige hypoteser.

Ved anvendelse af prisfunktionen i formel 32, kan den effektive nulkuponrente og forwardrente udtrykkes således:

$$\begin{aligned}R(0,\tau) &= r + \frac{1}{2}\mu_M\tau - \frac{1}{6}\sigma^2\tau^2\\ r^F(0,\tau,\tau+\alpha) &= r + \mu_M\tau - \frac{1}{2}\sigma^2\tau^2\end{aligned} \tag{33}$$

Den forventede værdi af forwardrenten ($r^F(0,\tau,\tau+\alpha)$) for et uendeligt kort tidsinterval α, givet at r(0) = r, er $r + \mu_M\tau$ - altså forwardrenten er "biased" lavere end forventet, hvor det pr. definition vil være således at i en deterministisk økonomi, falder dette sidste led bort.

Den forventede nulkuponrente for perioden 0 - τ = τ kan nu findes ved anvendelse af følgende udtryk:

$$R(0,\tau) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau (r + \mu_M s)ds = r + \frac{1}{2}\mu_M\tau \tag{34}$$

Det vil sige, at den effektive nulkuponrente er "biased" lavere end forventet - hvor dette sidste led selvfølgelig vil forsvinde i en verden under fuld sikkerhed.

Nu vil jeg foretage en udledning af de aktuelle risikopræmier, som implicit ligger i henholdsvis RTM-EH og UEH,YTM-EH hypoteserne, for at undersøge under hvilke antagelser disse hypoteser kan betragtes som værende valide.

Det vides, at den procentvise ændring i obligationsprisen kan skrives således:

$$\begin{aligned} &\frac{dP}{P} = \mu_P dt + \sigma_P dW \\ &\Rightarrow dP = \mu_P P dt + \sigma_P P dW \\ &\text{hvor} \\ &\mu_P P = \left[\mu P_r + P_t + \frac{1}{2}\sigma^2 P_{rr}\right] \\ &\text{og} \\ &\qquad \sigma_P P = \sigma P_r \end{aligned} \tag{35}$$

Med kendskab til dette udtryk, er det muligt at udlede den stokastiske proces, som driver henholdsvis RTM-EH og UEH, YTM-EH.

Ved anvendelse af Ito-lemma og med kendskab til formel 35, kan følgende udtryk opstilles:

$$\begin{aligned} d(\tfrac{1}{P}) &= d_P(\tfrac{1}{P})dP + \frac{1}{2}d_{PP}(\tfrac{1}{P})dP^2 \\ &= [-\mu_P dt - \sigma_P dW + \sigma_P^2 dt]\frac{1}{P} \\ &= (-\mu_P + \sigma_P^2)\frac{1}{P}dt - \sigma_P\frac{1}{P}dW \\ &= a\frac{1}{P}dt - \sigma_P\frac{1}{P}dW \\ \text{hvor} \quad a &= -\mu_P + \sigma_P^2 \end{aligned} \tag{36}$$

Dette udtryk er equivalent med Cox, Ingersoll og Ross 1981 formel 21.

For at definere den risikopræmie, som implicit er indeholdt i ovenstående proces, er det nødvendigt at vide hvordan denne hypotese antager, at den reciprokke værdi af obligationsprisen ændrer sig.

I henhold til CIR 1981 kan følgende relation opstilles:

$$E\left[d\left(\frac{1}{P}\right)\right] = -rdt \qquad (37)$$

Hvordan denne relation er opstået/fremkommet, er nok ikke helt indlysende, men en måde at bevise at påstanden faktisk er valid, er ved at udlede den centrale partielle differentialligning. Ved at gøre dette vil risikopræmien blive fundet samtidigt, således at man faktisk både påviser validiteten af formel 37, og finder den risikopræmie som implicit er indeholdt i RTM-EH.

Betragt nu porteføljen X, hvor jeg specielt er interesseret i ændringen i den reciprokke værdi af X. Denne portefølje er defineret ved henholdsvis h enheder af $1/P_1$ og 1 - h enheder af $1/P_2$, og hvor anskaffelsen af disse 2 obligationer er blevet finansieret ved at låne til den øjeblikkelige rente - den risikofrirente.

$$\left[\frac{d(\frac{1}{X})}{(\frac{1}{X})}\right] = h\left[\frac{d(\frac{1}{P_1})}{(\frac{1}{P_1})}\right] + (1 - h)\left[\frac{d(\frac{1}{P_2})}{(\frac{1}{P_2})}\right] - rdt \qquad (38)$$

Formel 38 er det basale udgangspunkt i udledningen af den partielle differentialligning ved anvendelse af det risikofri arbitrage argument[16].

I henhold til formel 37 påstås, at det sidste led i formel 27 ikke skal være af formel -r med derimod +r. Ved anvendelse af formel 38 kan det nemt vises, at formel 27 netop bliver af følgende udseende:

$$\frac{\delta P}{\delta t} + \frac{\delta P}{\delta r}\mu_M + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 P}{\delta r^2}\sigma^2 + rP - \sigma^2\left(\frac{\delta P}{\delta r}\right)^2\frac{1}{P} = 0 \qquad (39)$$

Dette er netop den partielle differentialligning, som RTM-EH vil resultere i[17]. Det skal dog ikke betragtes som et bevis af påstanden, defineret ved formel 37.

Måden at gøre dette på, er ved at betragte følgende hypotetiske portefølje:

[16] Baggrunden for at der i formel 38 kun optræder 2 fordringer, er fordi der kun behøves 1 + antal usikkerhedmomenter - dvs Wiener processer, og da den her betragtet proces er en-dimensionel, for at kunne opstille en risikofri portefølje - dvs en portefølje med et afkast lig den risikofri rente.

[17] Se Ingersoll maj 1980, Class Note no. 14.

$$\left[\frac{d(\frac{1}{X})}{(\frac{1}{X})}\right] = h\left[\frac{d(\frac{1}{P})}{(\frac{1}{P})}\right] + (1 - h)\left[\frac{d(\frac{1}{r})}{(\frac{1}{r})}\right] \tag{40}$$

Udtrykket i formel 40 er af samme form, som det fundamentale udgangspunkt i udledningen af den partielle differentialligning, når den fordring som driver prisen på P er en "observerbar" fordring; dvs formel 40 kan betragtes som værende udgangspunktet i udledningen af Black og Scholes 1973 formel.

Det umiddelbart relativt inkonsistente udtryk defineret ved formel 40, viser sig dog, at være præcis det der er nødvendigt for at være istand til at indse, at formel 37 er valid. Jeg vil nedenfor gennemgå argumentationen.

Ved indsættelse af formel 26 og 35 heri fås:

$$\begin{aligned}\frac{d(\frac{1}{X})}{(\frac{1}{X})} &= h(adt - \sigma_P dW) + (1 - h)(\mu dt - \sigma dW) \\ &= (ha + (1 - h)\mu) + ((1 - h)\sigma - h\sigma_P)dW\end{aligned} \tag{41}$$

Det jeg nu vil gøre er at vælge h således, at den procentvise ændring i den reciprokke værdi af porteføljen er at betragte som værende risikofri.

Det har følgende implikation - vælg h således at:

$$((1 - h)\sigma - h\sigma_P) = 0 \tag{42}$$

som medfører at:

$$(ha + (1 - h)\mu) = r \tag{43}$$

Dette udtryk kommer automatisk ved at vælge h i henhold til formel 42. Det betyder nemlig at porteføljen er at betragte som risikofri, og derfor må have et afkast lig den risikofrirente.

Ud fra formel 42, er det elementært at finde et udtryk for h, h kan nemlig skrives således:

$$h = \frac{\sigma}{\sigma + \sigma_P} \tag{44}$$

Ved indsættelse af formel 44 i 43 fås:

$$\frac{a - r}{\sigma_P} = \frac{r - \mu}{\sigma} \qquad \textbf{(45)}$$

Ved at betragte dette udtryk, ses det, at denne relation siger, at merafkastet for hver enhed af risiko for den ene fordring, er lig merafkastet for hver enhed af risiko for den anden fordring med modsat fortegn. Da merafkastet for hver enhed af risiko skal være identiske[18], fås:

$$\begin{aligned} \frac{r - \mu}{\sigma} &= -\left(\frac{-a + r}{\sigma_P}\right) \Rightarrow \\ \frac{-a + r}{\sigma_P} &= \frac{\mu - r}{\sigma} = \lambda \end{aligned} \qquad \textbf{(46)}$$

Ved anvendelse af formel 35, resulterer dette i følgende endelige partielle differentialligning:

$$\frac{\delta P}{\delta t} + \frac{\delta P}{\delta r}[\mu - \lambda\sigma] + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 P}{\delta r^2}\sigma^2 + rP - \sigma^2\left(\frac{\delta P}{\delta r}\right)^2\frac{1}{P} = 0$$

hvor $\qquad$ **(47)**

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

Dette da:

$$\begin{aligned} a &= -\mu_P + \sigma_P^2 = \left[P_r\mu + P_t + \frac{1}{2}\sigma^2 P_{rr}\right]\frac{1}{P} \Rightarrow \\ \mu_P &= -\left[P_r\mu + P_t + \frac{1}{2}\sigma^2 P_{rr}\right]\frac{1}{P} + \sigma^2\frac{P_r^2}{P^2} \end{aligned} \qquad \textbf{(48)}$$

Det kan udfra formel 47 nu indses, at relationen defineret ved formel 37 er valid, da der optræder et + fortegn foran rP, og formel 47 er equivalent med formel 39.

Nu da det er vist, at formel 37 er valid, er der kun tilbage at finde risikopræmien for RTM-EH.

Ved at betragte formel 47 ses det, at det forventede afkast kan udtrykkes som:

$$\mu_P = \frac{\lambda\sigma P_r}{P} + \frac{\sigma^2 P_r^2}{P^2} - r \qquad \textbf{(49)}$$

og derved risikopræmien som:

[18] Se Appendix B i arbejdspapiret "Estimation af rentestrukturen; en betragtning i kontinuerlig tid".

$$\Gamma_{RTM-EH} = \frac{\lambda\sigma P_r}{P} + \frac{\sigma^2 P_r^2}{P^2} \qquad (50)$$

Det selv samme udtryk vil også kunne udledes ved anvendelse af det risikofri-arbitrage argument direkte på formel 38, nemlig:

$$\begin{aligned} &\frac{\mu_P - \sigma_P^2 + r}{\sigma_P} = \lambda \Rightarrow \\ &\mu_P = \lambda\sigma_P + \sigma_P^2 - r \Rightarrow \\ &\mu_P = \frac{\lambda\sigma P_r}{P} + \frac{\sigma_P^2 P_r^2}{P^2} - r \end{aligned} \qquad (51)$$

Det kan nu tydeligt ses, at kravet for at denne hypotese er valid er at $\sigma^2 = 0$, ellers vil risikopræmien ikke kunne degenere til 0 og afkastet ikke til minus den risikofrirente. Det vil altså sige, at RTM-EH kun er valid, hvis der ingen stokastik er, eller sagt på en anden måde, RTM-EH er kun valid i en deterministisk verden.

Hvis nu UEH, YTM-EH betragtes, er det relativt nemt at foretage samme procedure med gennemgangen for RTM-EH i mente, derfor vil jeg kun her angive hovedresultaterne.

Den stokastiske proces for disse to hypoteser kan udledes til at have følgende udseende;

$$d(lnP) = (\mu_p - \frac{1}{2}\sigma_P^2)dt + \sigma_P dW \qquad (52)$$

som er equivalent med CIR´s 1981 formel 23.

I henhold til CIR 1981, kan følgende udtryk for hvorledes disse hypoteser implicit antager at ændringen i logaritmen til prisen ændrer sig;

$$\begin{aligned} lnP &= E[\ln X] \Rightarrow \\ E[d(lnP)] &= rdt \end{aligned} \qquad (53)$$

således at den endelige partielle differentialligning for disse hypoteser kan formuleres således:

$$\frac{\delta P}{\delta t} + \frac{\delta P}{\delta r}\mu_M + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 P}{\delta r^2}\sigma^2 - rP + \sigma^2\left(\frac{\delta P}{\delta r}\right)^2\frac{1}{P} = 0 \qquad (54)$$

Disse to hypoteser medfører, at det forventede afkast kan skrives som:

$$\mu_P = r + \lambda\sigma_P + \frac{1}{2}\sigma_P^2 \Rightarrow$$
$$\mu_P = r + \frac{\lambda\sigma P_r}{P} + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2 P_r^2}{P^2} \qquad (55)$$

og derved risikopræmien som:

$$\Gamma_{UEH,YTM-EH} = \frac{\lambda\sigma P_r}{P} + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2 P_r^2}{P^2} \qquad (56)$$

Med kendskab til udledningen under RTM-EH, er det nemt at indse, at disse hypoteser også kun vil være at betragte som valid for:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 = 0 \qquad (57)$$

Det vil sige den samme konklusion, som foretaget under RTM-EH kan udledes her.

I det foregående er det blevet vist, at den eneste valide hypotese i kontinuerlig tid er den lokale forventningshypotese (LEH).

Det spørgsmål, der nu er naturligt at stille er, - "vil dette også være gældende i diskret tid?"

Den nemmeste måde at illustrere dette på, er ved at betragte et praktisk eksempel for en diskret proces, og herudfra vise hvilke implikationer der ligge i de fire hypoteser for prisdannelsen.

Jeg vil her anskueliggøre dette ved et 3-periode binomialtræ, således:

		$r_{2,2}$
	$r_{1,1}$	
r		$r_{2,1}$
	$r_{1,0}$	
		$r_{2,0}$

Rentestrukturen som de fire hypoteser hver især implicit påstulerer er med udgangpunkt i den sproglige beskrivelse fra afsnit 4 af prisdannelsen i et binomialtræ for hver af hypoteserne angivet i Appendix A.

Hvis den diskrete stokastiske proces er en additiv proces, (dvs en normalfordelings antagelse) vil følgende rangordning af priserne for de fire hypoteser kunne opstilles:

$$P_{UEH} \leq P_{RTM\text{-}EH} < P_{YTM\text{-}EH} < P_{LEH} \qquad (58)$$

Lighedstegnet imellem P_{UEH} og $P_{RTM\text{-}EH}$ optræder kun for de første 2 perioder i gitteret, for den 3. periode og ud, er prisen fundet ved RTM-EH større.

En additiv proces er dog ikke en særlig heldig repræsentation for den stokastiske proces, da den ikke er arbitrage-fri i og med at der er en positiv sandsynlighed for, at der kan optræde negative renter i gitteret.

En mere repræsentativ proces vil være en multiplikativ proces (dvs en lognormalfordeling antagelse)[19]. Her vil følgende rangordning kunne observeres:

$$P_{UEH} < P_{RTM\text{-}EH} < P_{YTM\text{-}EH} < P_{LEH} \qquad (59)$$

Helt basalt er det relativt enkelt at argumentere sig frem til, at kun LEH kan være valid.

Baggrunden for, at de andre hypoteser ikke vil kunne være valide, er pga. konveksiteten og den konsekvens, at den lokale forventningsteori prisfastsætter fordringer ud fra et såkaldt "backward-induction" princip. Det antages med andre ord, at afkastet, på enhver fordring over samme tidshorisont, (korte tidshorisont) er identisk - nemlig lig den risikofri-rente. Et sådant prisfastsættelsesprincip vil nemlig ikke kollidere med den egenskab at obligationspriser er konvekse i renteændringer.

Det kan måske virke lidt overraskende, at det er konveksiteten, som spiller den afgørende rolle. Dette hænger dog sammen med den egenskab, at konveksitet har den konsekvens, at gennemsnitsprisen er højere des mere volatile renterne er, og des mere konveks pris-rente relationen er. Kun hvis der er fuld sikkerhed om de fremtidige renter, har konveksitet ingen betydning. Dette må have den implikation, at når renterne er volatile må der være en pris på konveksitet[20].

5: Risikopræmien, nogle betragtninger.

[19] Forklaringen på at en multiplikativ proces indeholder en lognormalfordelings antagelse kan forklares således: Den multiplikative proces påstulerer at den korte rente i næste periode enten er lig med $r_{1,1}$ = ra eller $r_{1,0}$ = r/a. Dette kan nemlig også udtrykkes ved logaritmen, nemlig ln($r_{1,1}$ eller $r_{1,0}$) = ln(r) +/- ln(a).

[20] Se arbejdspapiret "Portefølje betragtninger i en deterministisk verden", for en mere uddybende gennemgang af konveksitets begrebet.

I litteraturen er der blevet anvist forskellige metoder/principper til bestemmelse af risikoparameteret, eksempler herpå blev givet i afsnit 3.

Her vil der blive gennemgået hvilke krav, der må stilles til risikopræmieparameteret, for at den resulterende partielle differentialligning kan betragtes som værende valid, hvis risikopræmien bliver bestemt eksogent[21].

Det vides for gennemgangen i forrige afsnit, at den lokale forventningshypotese (LEH) er den eneste valide hypotese. Ud fra det foregående kan endvidere udledes, at der eksisterer to situationer, hvor det forventede afkast skal være lig den risikofri rente (dvs LEH valid), ellers vil processen ikke være valid, nemlig:

1: hvis risikoparameteret $\Gamma = 0$,

2: hvis der ingen usikkerhed er, altså $\sigma_P = 0$ (dvs en deterministisk verden)

Lad os nu genkalde formelen for risikopræmien:

$$\Gamma = \frac{\mu_P - r}{\sigma_P} \Rightarrow$$
$$r = \mu_P - \Gamma\sigma_P \tag{60}$$

Ud fra dette udtryk kan det tydeligt ses, at for at punkt 1 og 2, som specificeret ovenfor, kan holde, er det nødvendigt at der er et produkttegn imellem risikoparameteret og spredningen i obligationsprisen.

Hvis nu der vendes tilbage til den dynamiske model for rentestrukturen, som kort blev udledt i afsnit 3, kan det vises[22] at det forventede afkast kan udtrykkes som:

$$E(\underline{r}) = r + \Gamma\sigma_x \frac{P_r}{P}$$
$$\text{hvor} \quad \sigma_x = \sigma\sqrt{r} \tag{61}$$
$$\text{og} \quad \Gamma = \frac{\lambda r}{\sigma_x}$$

[21] Hvis risikopræmien bestemmes endogent, vil kravet hertil være at den opstillede model for hele økonomien er valid, se bl.a. Cox, Ingersoll og Ross 1985a og Breeden 1986. Denne form for modellering går under navnene intertemporal asset pricing eller C-CAPM (Consumption based capital asset pricing modelling).

[22] Se arbejdspapiret "Prisfastsættelse af obligationer i kontinuerlig tid".

således at formel 61 får følgende udseende:

$$E(\underline{r}) = r + \lambda r \frac{P_r}{P} \tag{62}$$

En generel fler-dimensionel beskrivelse af risikopræmien som opfylder de to ovenfor nævnte punkter, kan formuleres således:

$$E(\underline{r}) = r + \underline{\Gamma}\sigma \frac{P_r}{\underline{P}} \tag{63}$$

Γ er en søjlevektor på k-elementer, **σ** er en rækkevektor på k-elementer og $\mathbf{P_r/P}$ er en k-element søjlevektor af prisfølsomheder.

Det kan ved at betragte ovenstående udtryk ses, at det er af samme form som Ross`s APT-model 1976, hvor han viser, at en fordrings afkast er defineret ved en lineær faktormodel, og hvor det i ligevægt forventede mer-afkast over den risikofri rente, kan skrives som en lineær kombination af faktor-risikopræmien. Ross betragter dog aktier, men for obligationer må hans model reformuleres en anelse, således: det i ligevægt forventede mer-afkast, over den risikofri rente, kan skrives som en lineær kombination af faktor risikopræmien (**Γσ**) gange obligationens priselasticitet.

Det kan altså konkluderes, at der imellem risikoparameteret og spredningsparameteret, er et interaktivt forhold som er fuldstændig bestemmende for, om den omhandlende proces vil være at betragte som værende arbitrage-fri eller ej.

Modeller af ovenstående type er bl.a blevet analyseret af Litterman og Scheinkmann 1988 og Garbade 1986,1987 på det amerikanske marked, og på det danske marked af Dahl 1989 og Madsen 1994.

6: Konklusion

I dette arbejdspapir har jeg analyserede sammenhængen imellem de fire forskellige forventningshypoteser, der er blevet foreslået i litteraturen.

I den forbindelse blev det vist, at kun i en deterministisk verden ville de fire hypoteser degenerere til en, dvs være identiske.

Hvis derimod disse hypoteser blev betragtet i en verden under usikkerhed, og denne betragtning blev foretaget i kontinuerlig tid, blev det påvist, at kun den lokale forventningsteori ville være konsistent med det risikofri-arbitrage-argument. De andre hypoteser havde alle den implikation, at de kun kunne være valide hvis den betagtede økonomi var deterministisk.

De fire hypoteser blev endvidere kort sammenlignet i en diskret verden under usikkerhed, og her kunne det også indses, at den lokale forventningshypotese var den eneste valide, da de andre tre hypoteser kolliderede med konveksiteten i pris-rente relation.

Slutteligt blev der foretaget nogle betragtninger omkring risikoparameteret, dette da den lokale forventningsteori ikke kunne betragtes som værende en konsekvens af universal risiko neutralitet. Den lokale forventningsteori ville faktisk kun være valid hvis risikoparameteret var lig 0.

I forbindelse med diskussionen af risikoparameteret blev i den forbindelse konkluderet at der eksisterede et interaktivt forhold imellem risikoparameteret og variansen i obligationsprisen. Dette havde den implikation at man i definitionen af risikoparamteret skulle være påpasselig, da der var en vis risiko for, at dette ville kollidere med det risikofri-arbitrage-argument.

Litteraturliste

Breeden (1986) “"Consumption, production, inflation and interest rates : A synthesis”, Journal of Financial Economics, Vol 16 (1), side 3-39, Maj 1986

Brennan og Schwartz (1979) "A Continuous Time Approach to The Pricing of Bonds", Journal of Banking and Finance 3, side 133-155

Cox, Ingersoll og Ross (1981) "A Re-examination of Traditional Hypotheses about the Term Structure of Interest Rates", Journal of Finance 36, side 769-799

Cox, Ingersoll og Ross (1985) "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", Econometrica 53, side 363-385

Jamshidian (1991) "Forward Induction and Construction of Yield Curve Diffusion Models", Journal of Fixed Income, juni 1991, side 62-74

Ingersoll (1980) “The term structure of interest rates”, Class Notes no. 14, University of Chicago, may 1980

Madsen (1991a) "Porteføljebetragtninger i en deterministisk verden", arbejdspapir Realkredit Danmark, foråret 1991

Madsen (1992) "Prisfastsættelse af Obligationer I Kontinuert tid", arbejdspapir Realkredit Danmark, efteråret 1992

Vasicek (1977) "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", Journal of Financial Economics 5, side 177-188

Appendix A.

Rentestrukturen i et 3-periode binomialtræ for UEH:

$$\begin{aligned}&1.\ \text{per.} : r\\&2.\ \text{per.} : \frac{r_{1,1} + r_{1,0}}{2}\\&3.\ \text{per.} : \frac{r_{2,2} + 2r_{2,1} + r_{2,0}}{4}\end{aligned} \tag{64}$$

Rentestrukturen i et 3-periode binomialtræ for RTM-EH:

$$\begin{aligned}&1.\ \text{per.} : r\\&2.\ \text{per.} : \left[\frac{(1,r \times 1,r_{1,1}) + (1,r \times 1,r_{1,0})}{2}\right]^{\frac{1}{2}} - 1\\&3.\ \text{per.} : \left[\frac{(1,r\times 1,r_{1,0}\times 1,r_{2,0})+(1,r\times 1,r_{1,0}\times 1,r_{2,1})+(1,r\times 1,r_{1,1}\times 1,r_{2,1})+(1,r\times 1,r_{1,1}\times 1,r_{2,2})}{4}\right]^{\frac{1}{3}} - 1\end{aligned} \tag{65}$$

Rentestrukturen i et 3-periode binomialtræ for YTM-EH:

$$\begin{aligned}&1.\ \text{per.} : r\\&2.\ \text{per.} : \left[\frac{((1,r \times 1,r_{1,1})^{\frac{1}{2}} - 1) + ((1,r \times 1,r_{1,0})^{\frac{1}{2}} - 1)}{2}\right]\\&3.\ \text{per.} :\\&\left[\frac{((1,r\times 1,r_{1,0}\times 1,r_{2,0})^{\frac{1}{3}}-1)+((1,r\times 1,r_{1,0}\times 1,r_{2,1})^{\frac{1}{3}}-1)+((1,r\times 1,r_{1,1}\times 1,r_{2,1})^{\frac{1}{3}}-1)+((1,r\times 1,r_{1,1}\times 1,r_{2,2})^{\frac{1}{3}}-1)}{4}\right]\end{aligned} \tag{66}$$

Rentestrukturen i et 3-periode binomialtræ for LEH:

$$\begin{aligned}&1.\ \text{per.} : r\\&2.\ \text{per.} : \left[\frac{(1,r \times 1,r_{1,1})^{-1} + (1,r \times 1,r_{1,0})^{-1}}{2}\right]^{-\frac{1}{2}} - 1\\&3.\ \text{per.} : \left[\frac{(1,r\times 1,r_{1,0}\times 1,r_{2,0})^{-1}+(1,r\times 1,r_{1,0}\times 1,r_{2,1})^{-1}+(1,r\times 1,r_{1,1}\times 1,r_{2,1})^{-1}+(1,r\times 1,r_{1,1}\times 1,r_{2,2})^{-1}}{4}\right]^{-\frac{1}{3}} - 1\end{aligned} \tag{67}$$